

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 06 (20 + π^e Punkte)¹

Ausgabe 22.05.17 – Abgabe 30.05.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

(5 Punkte)

Die Bewegungsgleichung einer Punktladung (Masse m , Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, lautet im nicht-relativistischen Regime

$$m\ddot{\vec{q}} = e \left[\vec{E}(\vec{q}, t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q}, t) \right]. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t) \right]^2 + e\Phi(\vec{q}, t) \quad (2)$$

Hamiltonfunktion zur Bewegungsgleichung (1) (mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

▷ Aufgabe 2 (W'keitsstromdichte Punktladung)

(5 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine Punktladung im elektromagnetischen Feld gilt die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ mit einer W'keitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] - \frac{e}{m} \vec{A}(\vec{x}, t) |\psi(\vec{x}, t)|^2. \quad (3)$$

Frage: ist die W'keitsstromdichte eichinvariant (sieht ja nicht so aus ...)?

▷ Aufgabe 3 (Paulimatrizen und Spin-1/2)*

(8 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i, \quad i = x, y, z \quad (5)$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.

Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_i$, bzw. \hat{s}_i , als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

¹Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{s}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_i$, $i = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i \hat{\sigma}_k, \quad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = i \hat{1}, \quad (ijk = xyz \text{ zyklisch}). \quad (6)$$

(d) Es sei \vec{a} ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in \vec{a} -Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}, \quad \text{Tr} \{ \hat{\sigma}_a \} = 0, \quad \text{Det} \{ \hat{\sigma}_a \} = -1, \quad (7)$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet. Was sind denn die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(e) Nun seien \vec{a}, \vec{b} Euklidische Vektoren (nicht unbedingt Einheitsvektoren). Zeigen Sie

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \hat{\vec{\sigma}}. \quad (8)$$

(f) Seien nun mit $|0\rangle, |1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1, \sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β ?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ **Aufgabe 4 (Noch mehr Spinologie ...)** * (2 Punkte)

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi \vec{n}} := \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \phi \vec{n} \cdot \hat{\vec{s}} \right\} \quad (9)$$

wobei \vec{n} Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet \hat{U} in der Standard-Matrixdarstellung?

Hinweis: Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e -Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (7) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig ...

▷ **Aufgabe 5 (Diracs Ladungsquantisierungsargument)** (π^e Punkte)

[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung ...]

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der

elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigsten* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte \vec{B}_g ; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (10)$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\operatorname{div} \vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \quad (11)$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential \vec{A} geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \operatorname{rot} \vec{A}$. Wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ wäre in solchen Gebieten dann $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_I = \frac{g}{4\pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi \quad (12)$$

wie gewünscht $\operatorname{rot} \vec{A}_I = \vec{B}_g$. Da \vec{A}_I für $\vartheta \rightarrow \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_I von \vec{A}_I ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem \mathbb{R}^3 auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_{II} = -\frac{g}{4\pi} \frac{1 + \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi \quad (13)$$

$\operatorname{rot} \vec{A}_{II} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_{II} aus dem \mathbb{R}^3 ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_{II} - \vec{A}_I = -\frac{2g}{4\pi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi. \quad (14)$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_{II} - \vec{A}_I = \operatorname{grad} \chi \quad (15)$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi} \varphi. \quad (16)$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_{II} = \exp \left\{ -i \frac{2eg}{4\pi \hbar} \varphi \right\} \psi_I. \quad (17)$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt $\text{div}\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktikumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius $\text{div}\vec{B} = 0$ steht in den Sternen. Hätten Sie eine Idee, wie die Maxwell'sche Theorie zu erweitern wäre, wenn sich herausstellt, dass es tatsächlich magnetische Monopole gibt?