

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 07 (20 Punkte)

Ausgabe 29.05.17 – Abgabe 06.06.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Wohnst-Du-noch)** (5 Punkte)

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.

▷ **Aufgabe 2 (Drehimpulsunschärfen)*** (5 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Varianzen der x - und y -Komponenten des Bahndrehimpulses in Standardzuständen $|\ell m\rangle$.
- (b) Berechnen Sie die Varianz der x - und y -Komponenten eines Spin- $\frac{1}{2}$ in den Zuständen $|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle$.

▷ **Aufgabe 3 (Addition von Bahndrehimpuls und Spin- $\frac{1}{2}$)** (10 Punkte)

[Klausurrelevant? Nicht in dieser Form – aber die Kopplung $\ell = 1$ an $s = 1/2$ könnte durchaus “dran” kommen ...]

Wird beim Wasserstoffproblem auch der Spin der Elektrons berücksichtigt ist mit

$$\hat{\vec{j}} := \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{s}} \quad (1)$$

der Gesamtdrehimpuls des Elektrons verabredet.

Gemeinsame Eigenzustände zu $\hat{j}^2, \hat{j}_z, \hat{\ell}^2$ und \hat{s}^2 werden notiert $|jm_jls\rangle$, wenn nötig Kommata zwischen den Einträgen, worin Quantenzahlen j, m_j, ℓ und s definitiosgemäß

$$\begin{aligned} \hat{j}^2 |jm_jls\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |jm_jls\rangle, & \hat{j}_z |jm_jls\rangle &= \hbar m_j |jm_jls\rangle, \\ \hat{\ell}^2 |jm_jls\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell+1) |jm_jls\rangle, & \hat{s}^2 |jm_jls\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |jm_jls\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

Der Wert von s liegt natürlich fest, $s = \frac{1}{2}$, der Wertebereich von ℓ ist variabel $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Zu jedem ℓ (mit Ausnahme $\ell = 0$) gibt es zwei mögliche Werte $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Für $\ell = 0$ gibt es nur ein $j = \frac{1}{2}$.

Das Ziel ist es, die $|jm_jls\rangle$ durch eine Linearkombination der Produktzustände $|\ell m_\ell; s \mu\rangle := |\ell m_\ell\rangle \otimes |s \mu\rangle$ auszudrücken, wobei Quantenzahlen m_ℓ und μ definitionsgemäß $\hat{l}_z |\ell m_\ell s \mu\rangle = \hbar m_\ell |\ell m_\ell s \mu\rangle$, $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$, und $\hat{s}_z |\ell m_\ell s \mu\rangle = \hbar \frac{\mu}{2} |\ell m_\ell s \mu\rangle$ mit $\mu = \pm 1$. In jedem Fall $m_j = -j, -j + 1, \dots, j$.

Zeigen Sie: Für $\ell = 1, 2, \dots$

$$|\ell \pm \frac{1}{2}, m_j; \ell, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}} |\ell, m_j \mp \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\pm\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}} |\ell, m_j \pm \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\mp\rangle \quad (3)$$

und für $\ell = 0$

$$|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}\pm\rangle. \quad (4)$$

Spektroskopisch notiert man die m_j -Multipletts in der Form $n\ell_j$, etwa $2p_{\frac{1}{2}}$ oder $2p_{\frac{3}{2}}$. In der Grobstruktur ("Kepler-Atom") sind diese beiden Niveaus anenergetisch entartet. Wird die Wechselwirkung des Spins mit dem Bahndrehimpuls in der Feinstruktur erfasst, wird diese Entartung aufgehoben.