

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 09 (20 + e^e Punkte)¹

Ausgabe 19.06.17 – Abgabe 27.06.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Länderfusion Berlin-Brandenburg) (6 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand ϕ , in Berlin im Zustand χ . Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll “Fritzchen”, die Berliner das ihrige zärtlich “Marlene”. In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (1)$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (2)$$

notiert werden, und von “Fritzchen” und “Marlene” dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

▷ Aufgabe 2 (Gesellige Bosonen) (4 Punkte)

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustände $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunden werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischaun. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...

¹Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld)** (10 Punkte)

Das “Zwei-Zustands System”, auch genannt “zwei-Niveau Atom”, “Spin im Magnetfeld” oder “qubit” ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}e^{-i\omega t}\hat{\sigma}^\dagger \quad (3)$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

- Ich behaupte, die durch \hat{H} beschriebene Dynamik wurde in der Vorlesung bereits ausführlich besprochen. Wann war das, und in welchem Kontext?
- Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger$?
- Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?
- Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit “ungestörtem” Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \quad (4)$$

- Zum Hamiltonoperator \tilde{H} kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum ...

▷ **Aufgabe 4 (Zenos Paradox)** (e^e Punkte)

Zeno von Elea, ein Vorsokratiker, ist bekannt für seine Paradoxe. Das bekannteste ist vermutlich “Achilles und die Schildkröte”: bei einem Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte, bei dem der Schildkröte aus Gründen der Fairneß ein gewisser Vorsprung eingeräumt wird, kann Achilles die Schildkröte nie einholen, denn wann immer er da ankommt, wo die Schildkröte gerade noch war, ist sie schon weiter. Vermutlich haben Sie auch schon gelernt, dass spätestens seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung das Paradox keines mehr ist.

Ein anderes Paradox betrifft fliegende Pfeile – nach Zeno eine Unmöglichkeit: in jedem Moment seines Fluges nimmt der Pfeil einen bestimmten, exakt umrissenen Ort ein. Er ist dort in Ruhe, denn wer sich an *einem* Ort befindet kann sich schließlich nicht bewegen (Bewegung ist “Betreten” oder “Verlassen” eines Ortes, nicht “Befinden”). Da sich also der Pfeil zu jedem Moment offensichtlich in Ruhe befindet, kommt er überhaupt nicht vom Fleck.

Von Pfeilen befreit, und für die Belange der Quantenmechanik formuliert, lautet Zenos Paradox: jeglicher Versuch, die Dynamik eines Systems kontinuierlich zu beobachten, friert das System ein.

Dass die Quantenmechanik genau das liefert soll hier eingesehen werden. Dazu nehmen wir ein resonant getriebenes Zwei-Niveau System (Hamilton wie in Gl. (3)). Das System sei zu einem Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|g\rangle$. Zur Zeit t wird eine Zustandsmessung gemacht. Unter der Voraussetzung, dass im Zeitintervall $[0, t]$ keine Messung stattfand, ist dann die Besetzungsw'keit des Grundzustands, daran sei erinnert, gegeben $P_g(t) = \cos(\Omega_0 t)$ entsprechend die Besetzungsw'keit des angeregten Zustandes $P_e = 1 - \cos(\Omega_0 t)$.

Was passiert eigentlich, wenn Zustandsmessungen zu Zeiten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$ mit $\Delta t = t/N$ vorgenommen werden? Bestätigen Sie, dass im Limes $N \rightarrow \infty$ (also "kontinuierlich nachgucken, in welchem Zustand sich das Atom befindet") das Atom – trotz Antrieb! – im Grundzustand eingefroren ist.

Das "Quanten-Zeno" Paradox – angelsächsisch formuliert "A watched pot never boils" – ist kein Paradox, sondern Wirklichkeit! Dass Zwei-Niveau Systeme sehr wohl im angeregten Zustand sein können befindet sich aber nicht im Widerspruch zu dieser Wirklichkeit. Man muss sie halt nur "in Ruhe lassen" – sprich: eben nicht an ein "permanent-nachgucken-Instrument" koppeln ...

Hinweis: Wenn Sie mit der Aufgabe fertig sind: nutzen Sie doch mal irgendeine Suchmaschine, Stichwort "Zeno Paradox", oder gehen gleich auf Wikipedia. Besser noch: gehen Sie auf die Uni-Seite der Bibliothek, dort auf e-journals, natürlich Physik, klicken sich auf Physical Review A durch, und laden einfach herunter: "Quantum Zeno effect", W. M. Itano et al., Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990). Da lernen Sie dann, wie man ein "permanten-nachgucken-Instrument" im Labor realisieren kann. Anschließend erfreuen Sie sich an einer Debatte über die Grundlagen der Quantenmechanik: "Comment on 'Quantum Zeno effect' " von L. E. Ballentine, Phys. Rev. A **43**, 5165 (1991); "Reply to 'Comment on Quantum Zeno effect' " von W. M. Itano et al, Phys. rev. A **43**, 5168 (1991); "Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet" von V. Frerichs und A. Schenzle, Phys. Rev. A **44**, 1962 (1991).