Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 10 (20 Punkte)

Ausgabe 26.06.17 – Abgabe 04.07.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Berechnung von $G_0^{(\pm)}$) (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde die freie Greensfunktion über die Resolvente des freien Hamilton-operators $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$ eingeführt. In Ortsdarstellung

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \left\langle \vec{x} \left| \frac{1}{E - \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} \pm i\epsilon} \right| \vec{x}' \right\rangle \tag{1}$$

Beweisen Sie

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \,. \tag{2}$$

worin $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

Hinweis: An geeigneter Stelle "Impuls-Eins" $\hat{1} = \int |\vec{s}\rangle\langle\vec{s}| d^3s$ einschieben, wobei $\hat{\vec{p}}|\vec{s}\rangle = \hbar\vec{s}|\vec{s}\rangle$, und sich an den Residuensatz erinnern ...

▷ Aufgabe 2 (Yukawa-Streuung)* (4 Punkte)

Illustrativ das Beispiel der Streuung am Yukawapotential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \tag{7}$$

für die wir Sie bitten, die Streuampltitude, den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in der ersten Born'schen Näherung zu berechnen. Diskutieren Sie bitte auch den Grenzfall $\mu, V_0 \to 0$ mit $V_0/\mu = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0)$ fest, in dem das Yukawapotential die Form des Coulomb- bzw. Gravitationspotentials annimmt.

▷ Aufgabe 3 (Elektron-Atom Streuung) (4 Punkte)

Auch ein beliebtes Schmankerl ist die elastische Streuung von Elektronen an einem neutralen Atom. Das Wechselwirkungspotential ist $V = -e_0\Phi$ ($-e_0$ ist die Ladung des Elektrons), wobei Φ das elektrostatische Potential des Atoms,

$$\Delta\Phi = -e_0[Z\delta(\vec{x}) - \rho(\vec{x})]/\epsilon_0 \tag{11}$$

worin Z die Kernladungszahl des Atoms, und ρ die Ladungsverteilung seiner Elektronen, $\int d^3x\rho(\vec{x}) = Z$. Bestimmen Sie den einen Ausdruck für den differentiellen Streuquerschnitt in Bornscher Näherung; machen Sie, sofern nötig, vom sog *Formfaktor* der elektronischen Ladungsverteilung Gebrauch,

$$F(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \rho(\vec{x}') d^3x' \,. \tag{12}$$

Wenden Sie Ihre Erkenntnisse auf die Streuung von Elektronen an atomarem Wasserstoff im Grundzustand an. Diskutieren Sie den differentiellen Streuquerschnit im Regime großer und kleiner Energien.

Hinweis: Jetzt bloß nicht die Laplacegleichung (11) lösen! In Bornscher Näherung brauchen wir doch nur die Fouriertransformierte des Potentials $\Phi(\vec{x})$ – und dazu reicht es doch, die Laplacegleichung einer Fouriertransformation zu unterwerfen ....