Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 11 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 06.07.17 – Abgabe 11.07.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Geschwindigeitsoperator) (6 Punkte)

In Anlehnung an die klassische Mechanik ist der quantenmechanische Geschwindigkeits-operator definiert

$$\hat{\vec{v}} := \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\vec{q}}\right] . \tag{1}$$

wobei $\hat{\vec{q}}$ den Ortsoperator und $\hat{H}$ den Hamiltonoperator bezeichnet. Für ein Teilchen der Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}}, t)\right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{q}}, t) . \tag{2}$$

worin $\Phi, \vec{A}$ das Potential des Feldes.

Zeigen Sie

(a)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\right] . \tag{3}$$

(b)

$$[\hat{q}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar}{m}\delta_{ij} \tag{4}$$

worin $i, j = x, y, z$ kartesischer Index.

(c)

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar e}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k \tag{5}$$

wobei ϵ_{ijk} den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor bezeichnet, und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (Magnetfeld).

Bemerkung: Zuweilen wird diese Identität in der Form $\hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{v}} = i\hbar e/(m^2)\vec{B}$ geschrieben.

▷ Aufgabe 2 (Bewegung im Magentfeld) (10 Punkte)

Wir betrachten ein geladenes Punktteilchen (Masse m, Ladung e) im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}})\right]^2 , \tag{6}$$

mit $\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{q}}} \times \vec{A} = \vec{B}$.

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(a) Stellen Sie die *klassischen* Bewegungsgleichungen auf, lösen Sie sie, und verifizieren Sie, daß sich das Teilchen mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{eB}{m} \tag{7}$$

auf einer Kreisbahn bewegt. Was ist die Energie des Teilchens?

(b) Definieren Sie Operatoren

$$\hat{X}_0 = \hat{q}_x + \hat{v}_y/\omega_{\mathrm{c}}\,, \tag{8}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{q}_y - \hat{v}_x/\omega_{\mathrm{c}}\,, \tag{9}$$

wobei $\hat{\vec{v}}$ der in Aufgabe (1) definierte Geschwindigkeitsoperator ist. Beweisen Sie

$$\left[\hat{H}, \hat{X}_0\right] = 0\,, \tag{10}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{Y}_0\right] = 0\,, \tag{11}$$

$$\left[\hat{X}_0, \hat{Y}_0\right] = -i\frac{e}{|e|}a_{\mathrm{m}}^2\,, \tag{12}$$

wobei $a_{\mathrm{m}} = [\hbar/(|e|B)]^{1/2}$ die sog. *magnetische Länge* bezeichnet. Was ist die physikalische Bedeutung der Operatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$?

Hinweis: Die physikalische Bedeutung erkennen Sie nach einem kurzen Blick auf Ihre Lösung von (a). Übrigens: X_0, Y_0 nennt man auch *Orbitzentrumskoordinaten* ...

(c) Beweisen Sie die Unschärferelation der Orbitzentrumskoordinaten

$$\delta X_0 \delta Y_0 \geq \frac{1}{2}a_{\mathrm{m}}^2\,. \tag{13}$$

Behalten Sie in Erinnerung: ein geladenes Teilchen im Magentefeld beansprucht eine Fläche umgekehrt proportional dem Magnetfeld.

(d) Drücken Sie den Hamiltonoperator (6) durch den in Aufgabe (1) definierten Geschwindigkeitsoperator aus. Benutzen Sie die Algebra des Geschwindigkeitsoperators um die Eigenwerte von $\hat{H}$ zu bestimmen,

$$E_n(v_z) = (n + 1/2)\hbar|\omega_c| + mv_z^2/2\,. \tag{14}$$

Hinweis: $\hat{H}$ ist quadratisch in $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ wobei der Kommutator von $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ dem kanonischen Kommutator eines 1D Punktteilchens gleicht ... offensichtlich hat man es bei der Bewegung in der xy-Ebene formal mit einem harmonischen Oszillator zu tun.

(e) Um auch die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ zu bestimmen wählen Sie die sog *Landau-Eichung* $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$. Lösen Sie die dazugehörige stationäre Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung.

(f) In der Landau-Eichung lauten die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\psi(x,y,z) = \mathcal{N} e^{i(k_x x + k_z z)}\, H_n((y-y_0)/a_\mathrm{m})\, e^{-(y-y_0)^2/a_\mathrm{m}^2}\,, \tag{15}$$

wobei $y_0 = -\hbar k_x/(eB)$, $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante, und H_n Hermitepolynom. Was ist die Bedeutung der Quantenzahlen k_x, k_z, n?

Hinweis: Studieren Sie die Orbitzentrumsoperatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$ in der Landau-Eichung ...

(g) Schätzen Sie die Entartung der Landauniveaus (14) für ein großes System mit periodischen Randbedingungen ab. Vielleicht lassen Sie sich von den in (c) gesammelten Erfahrungen inspirieren ...

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe studierte System spielt eine wichtige Rolle beim sog. *Quanten-Hall Effekt*. Eine gute Einführung vermittelt M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath und J. Hajdu *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1994).

▷ Aufgabe 3 (Mischung von Gemischen) (4 Punkte)

Seien $\hat{\varrho}_0$ und $\hat{\varrho}_1$ zwei Zustände. Zeigen Sie: dann ist auch die Konvexkombination

$$\hat{\varrho}_\lambda = (1-\lambda)\hat{\varrho}_0 + \lambda \varrho_1\,, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{16}$$

für jedes λ im Intervall $[0,1]$ ein Zustand.

▷ Aufgabe 4 (Daimler-Chrysler) (π scores)

Alice prepares a qubit in the up-state $|+_i\rangle$ with respect to one out of three possible quantization axis $\vec{a}_i$, $i = 1,2,3$, where the $\vec{a}_i$ form a co-planar “Mercedes-Stern”,

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i = 0\,. \tag{17}$$

Bob knows the possible directions $\vec{a}_i$, but he does not know which particular direction Alice has chosen. What is his initial level of ignorance? How much could he expect to learn about Alice's choice, and what is his optimal strategy?