# Theoretische Physik III
# - Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Klausurbeispiel 17.07.2017 (90 Punkte)

Bearbeitungszeit 90 Minuten (+ ggf Verlängerung) – Besprechung n.V.

– keine Hilfsmittel –

---

## Verständnis und Gedächtnisfragen (30 Punkte)

▷ **Aufgabe 1 (Grundlagen I)** (15 Punkte)

(a) Gegeben ein Massepunkt, dessen Zustand in der Ortsdarstellung durch eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ beschrieben sei. Was ist die physikalische Bedeutung von $\psi(\vec{x},t)$? (2P)

(b) Wie lautet für gegebenes $\psi(\vec{x},t)$ die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung? Was ist ihre physikalische Bedeutung? (3P)

(c) Der Massepunkt sei in einem Zustand

$$\psi(\vec{x},t) \propto \alpha(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \beta(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$

mit $\vec{k} = (a,a,0)$ präpariert. Was ist die physikalische Bedeutung der komplexen Koeffizienten $\alpha$, $\beta$ (Betrag, Phase)? (4P)

(d) Gegeben eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, t)$ zweier unterscheidbarer Teilchen. Welche Bedeutung hat der Ausdruck $|\psi(\vec{a},\vec{b})|^2 d^3x^{(1)} d^3x^{(2)}$? Welche Bedeutung hat der Ausdruck $|\psi(\vec{b},\vec{a})|^2 d^3x^{(1)} d^3x^{(2)}$? (6P)
<u>Zusatzfrage (für extra 5 Punkte!)</u>: Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mindestens ein Teilchen?

▷ **Aufgabe 2 (Grundlagen II)** (15 Punkte)

(a) Wie lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation (für Ort und Impuls) und was ist ihre Interpretation? (6P)

(b) Gegeben ein Spin-1/2 Teilchen das im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1+i}{2}|\downarrow_z\rangle \tag{2}$$

präpariert sei. Mit welcher W'keit wird bei einer $s_z$-Messung das Teilchen im Zustand $|\downarrow_z\rangle$ (also "$z$-antipolarisiert") gefunden?(3P) Mit welcher W'keit wird bei einer $s_x$-Messung das Teilchen im Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (also "$x$-polarisiert") gefunden? (6P)

## Rechenaufgaben (60 Punkte)

### ▷ Aufgabe 3 (Kiste mit Delle) (15 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einer räumlichen Dimension im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } |x| \geq a/2 \\ \varepsilon x^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a > 0$, $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon x$ hinreichend klein, so dass Sie den Term als kleine Störung auffassen dürfen.

(a) Skizzieren Sie das Potential. Was sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte des ungestörten Problems? (6P)

(b) Betrachten Sie nun das gestörte Problem. Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten in erster Ordnung. (9P)

### ▷ Aufgabe 4 (Ritz Wandpendel) (15 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ befinde sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 & \text{für } \; x \geq 0 \\ \infty & \text{für } \; x < 0 \end{cases} \quad , \quad f > 0\,. \tag{3}$$

Der Hamiltonoperator des Systems liest sich (Ortsdarstellung)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie mittels Variationsverfahren unter Verwendung der Variationsfunktionenschar $\{\psi_\kappa(x) = xe^{-\kappa x} | x \in \mathbb{R}_0^+, \kappa \in \mathbb{R}^+\}$ eine obere Grenze für die Grundzustandsenergie des Systems.

<u>Hinweis:</u> Nutzen Sie gegebenenfalls die Formel $\int_0^\infty dx x^n e^{-cx} = \frac{n!}{c^{n+1}}$, $c > 0$, für deren Beweis wir einen Extrapunkt spendieren.

(b) Geben Sie Gründe warum die Variationsfunktionen für die Problemstellung geeigent erscheinen.

(c) Das Problem ist exakt diagonalisierbar. Zeigen Sie $E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Wie vergleicht sich die exakte Grundzustandsenergie mit dem Resultat des Variationsverfahrens?

(d) Geben Sie ein physikalisches System an, das durch den Hamiltonoperator modelliert wird.

### ▷ Aufgabe 5 (15 Punkte)

Für die Potentialstreuung am Potential der "weichen Kugel"

$$V(r) = \begin{cases} V_0(1 - r^2/a^2)\,, & 0 \leq r \leq a \\ 0\,, & r > a \end{cases} \tag{5}$$

berechne man den differentiellen und totalen Streuquerschnitt in erster Born'scher Näherung.

▷ **Aufgabe 6 (Heisenberg'sche Bewegungsgleichung)** (15 Punkte)

Gegeben der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - g\hat{q})^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{q}^2 \tag{6}$$

mit $g, k$ reelle Konstanten (welcher physikalischer Dimension?).

(a) Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf. (5P)

(b) Lösen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen. (10P)

---

## The extra mile (15 Punkte)

▷ **Aufgabe 7 (Drehimpulskopplung)** (15 Punkte)

Gegeben ein Spin-1 Teilchen, von dem bekannt ist, dass es sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 1$ bewegt. Welche Dimension hat der Hilbertraum des Systems? Welche Werte kann die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl $j$ annehmen? Wie lauten die Basiszustände der gekoppelten Basis (= Gesamtdrehimpuls-Basis)?

---

## Erinnerungshilfen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\hat{J}_\pm |JM\rangle = \hbar\sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}\,|J, M \pm 1\rangle \tag{8}$$