

Kapitel 16

EPR Paradoxon und Bellsche Ungleichungen

Aus der alltäglichen Praxis – und sei es die hoch-artifizielle Praxis im Physikkolabor – sind wir gewohnt, dass Dinge Eigenschaften haben (Farbe, Form, Geschmack), und dass die Dinge anhand der Werte ihrer Eigenschaften (rot–grün, rund–eckig, süß–sauer) identifizierbar und insbesondere voneinander unterscheidbar sind. Im Idealfalls sind Eigenschaften objektiv – soll heißen dass zwei PhysikerInnen, die unabhängig voneinander in ein und denselben Apfel beißen (den Geschmack messen) zum gleichen Schluss kommen, etwa dass der Apfel “süß” ist. Sie können natürlich auch garnicht reinbeißen – den Geschmack, so unsere Überzeugung, kümmert das nicht. Der Mond ist da, und rund und schön, auch wenn grad niemand hinschaut.

Diese Auffassung von der Welt nennt man *Realismus*. Philosophen haben lange darüber nachgedacht, ob diese Auffassung von Welt auch unter allen Umständen haltbar ist und sie haben mit verschiedenen Argumenten verschiedene Antworten

gefunden (ohne dass das allerdings die Alltagsauffassungen erschütterte hätte). Unter anderem haben sie dabei entdeckt, dass der Mond durchaus nicht da sein könnte (oder eckig sein könnte), wenn grad niemand hinschaut: der Realismus ist wesentlich *metaphysische* Position, also eine Grundüberzeugung, die sich im Rahmen der Physik weder be- noch widerlegen lässt.

PhysikerInnen hat die grundsätzliche “Unbereisbarkeit” des Realismus nie gestört. Die realistische Grundauffassung erwies sich als äußerst ökonomisch (man musste keine Zeit mit Spekulationen über den Verbleib des unbeobachteten Mondes anstellen) und man sah keinen Grund, davon abzurücken.

Mit der Entwicklung der Quantenmechanik, hier insbesondere der sog. *Kopenhagener Interpretation* von Bohr, Heisenberg und anderen, wurde die realistische Grundüberzeugung allerdings erschüttert – mit einem entscheidenden Unterschied, dass es nun eine physikalische Theorie war, die die Axt an den Alltags-Realismus legte, und nicht irgendein sophistisches, letztendlich aber immer beliebiges Armstuhl-Argument der Philosophie.

Eigenschaften (Observablen) eines Spin-1/2 Teilchens sind vom Typ “Spinkomponente in Richtung \vec{v} ”. Jede Eigenschaft $\hat{\sigma}_u$ hat zwei mögliche Werte (Eigenwerte=Messwerte) $\sigma_u = +1$ oder $\sigma_u = -1$. Schickt man ein Spin-1/2 Teilchen durch einen Stern-Gerlach Magneten mit Orientierung \vec{v} (kurz: \vec{v} -SGM), fragt also nach dem Wert der Eigenschaft $\hat{\sigma}_u$, erhält man entweder $\sigma_u = +1$ oder $\sigma_u = -1$ als Antwort, je nach dem ob das Teilchen in $+\vec{v}$ -Richtung oder in $-\vec{v}$ -Richtung den SGM verlässt. Befragt man ein jedes Teilchen, das den \vec{v} -SGM in $+\vec{v}$ Richtung verlässt erneut nach dem Wert seiner Eigenschaft $\hat{\sigma}_u$, wird ein jedes solches Teilchen wieder um die gleiche Antwort geben, nämlich $\sigma_u = +1$. Solche Teilchen haben – ganz im gewöhnlichen Sinne – die Eigenschaft $\sigma_u = +1$.

Man kann natürlich Teilchen mit Eigenschaft $\sigma_u = +1$ auch nach ihrer Eigenschaft $\hat{\sigma}_v$ fragen. Manche werden darauf mit $\sigma_v = +1$, andere mit $\sigma_v = -1$ antworten. Im

speziellen Fall, dass \vec{u} und \vec{v} orthogonal, beispielsweise, wird die Hälfte mit $\sigma_v = +1$ antworten, die andere Hälfte mit $\sigma_v = -1$. Dabei kann man für ein gegebenes $\sigma_u = +1$ Teilchen nicht voraussagen, ob es nun mit $\sigma_v = +1$ oder mit $\sigma_v = -1$ antworten wird. Nach der Kopenhagen-Interpretation der QM ist die Eigenschaft $\hat{\sigma}_v$ von $\sigma_u = +1$ Teilchen vor der $\hat{\sigma}_v$ -Messung *unbestimmt* und erhält erst in der Wechselwirkung mit dem Messgerät einen bestimmten Wert.

Werden die $\sigma_u = +1$ Teilchen, nachdem sie nach ihrer Eigenschaft $\hat{\sigma}_v$ befragt wurden, erneut nach ihrer Eigenschaft $\hat{\sigma}_u$ befragt, werden nun keineswegs alle mehr mit $\sigma_u = +1$ antworten. Im speziellen Fall dass \vec{u} und \vec{v} orthogonal, beispielsweise, wird die Hälfte mit $\sigma_u = +1$, die andere Hälfte mit $\sigma_u = -1$ antworten, wobei wiederum nicht vorausgesagt werden kann für welche der beiden Möglichkeiten sich ein gegebenes Teilchen entscheidet. Die Wechselwirkung mit dem $\hat{\sigma}_v$ -Messgerät hat den Wert der $\hat{\sigma}_u$ Eigenschaft offensichtlich massiv und in unvorhersagbarer Weise gestört. In der Kopenhage-Interpretation der QM heißen $\hat{\sigma}_u$ und $\hat{\sigma}_v$ *komplementäre Observable*.

16.1 EPR

“Unbestimmte Eigenschaften” und “Komplementarität” waren für Albert Einstein (und andere wie Schrödinger, DeBroglie, Bohm etc) anstößig. Zwar wurde die Quantenmechanik nicht in Frage gestellt – Einstein hat bekanntlich maßgeblichen Anteil an ihrer Entwicklung gehabt – aber mit der Auffassung von Bohr, Heisenberg und anderen Anhängern der Kopenhagen-Interpretation wollte man sich nicht abfinden. Einsteins Arbeitshypothese dabei war, dass die Quantenmechanik so etwas wie eine Thermodynamik der Mikrophysik darstellt, deren Gesetze – genau wie in der klassischen Thermodynamik – letztendlich auf deterministischen Wechselwirkungen zusätzlicher Freiheitsgrade beruhen, sog *verborgener Variabler*. Die Quantenmechanik, so seine Überzeugung, ist insofern unvollständig als dass weder die verborgenen

Variable noch ihre Gestzmäßigkeiten bislang im einzelnen bekannt sind.

Einsteins Angriffspunkt ist die in der Kopenhagen postulierte unkontrollierbare Wechselwirkung mit dem Messgerät und das daraus abgeleitete Enthaltensankheitsgebot was die Eigenschaften der Dinge betrifft. In der Arbeit “Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?”¹ entwickeln die Autoren Einstein, Podolsky und Rosen (kurz: EPR) ein Argument demzufolge es sehr wohl möglich ist, sinnvoll über komplementäre “Eigenschaften” zu reden und kommen zum Schluss, dass das Komplementaritätsprinzip nichts anderes als die Unvollständigkeit der Quantenmechanik ausdrückt. In seiner Erwidern argumentiert Bohr, dass es sinnlos ist über komplementäre Eigenschaften zu reden, und schließt, dass das Komplementaritätsprinzip nichts anderes als die Vollständigkeit der Quantenmechanik ausdrückt.² Im Gegensatz zur Arbeit von Einstein, Podolsky und Rosen, die sich durch luzide Klarheit und messerscharfe Argumentation auszeichnet, ist die Bohrsche Erwidern allerdings ziemlich verwickelt, um nicht zu sagen verschwurbelt, und sein Gedankengang bleibt letztendlich nebulös.

Das EPR-Argument basiert auf einem Zwei-Teilchen System wobei jedes der beiden Teilchen an zwei raum-zeitlich getrennten Messplätzen “Alice” bzw “Bob” analysiert wird. In einer später von Bohm eingeführten Variante handelt es sich bei den beiden Teilchen um Spin-1/2 Teilchen die von einer Quelle, heutzutage genannt “EPR-Quelle”, in einen Spin-Singlet Zustand präpariert werden,

$$|\psi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z \downarrow_z\rangle - |\downarrow_z \uparrow_z\rangle) \quad (16.1)$$

Der erste Eintrag bezieht sich auf Alices Teilchen, der zweite Eintrag auf Bobs Teilchen. Die quantenmechanischen Observablen Pauli-Spin werden von Alice $\hat{\sigma}_i$,

¹Phys. Rev. 47 (1935), 777

²Phys. Rev. 48 (1935), 696

von Bob mit $\hat{\tau}$ bezeichnet. Es sei daran erinnert, dass der Spin-Singlet Zustand invariant unter Drehungen ist, also

$$|\psi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_u \downarrow_u\rangle - |\downarrow_u \uparrow_u\rangle) \quad (16.2)$$

für jede Richtung \vec{u} .

Die Frage ist, welche Eigenschaften den jeweiligen Teilchen auf Alices bzw Bobs Seite zugeschrieben werden können. Als Kriterium für Eigenschaften (im realistischen Sinne) formulieren Einstein und Mitarbeiter

Realitätskriterium Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen, ohne das System zu stören, dann gibt es ein Element physikalischer Realität, das dieser Größe entspricht.

Vervollständigt wird das Realitätskriterium durch ein

Lokalitätsprinzip Die Messergebnisse von Alice hängen nur von Parametern bei

Alice, die Messergebnisse von Bob hängen nur von Parametern bei Bob ab.

Alice wählt eine Orientierung \vec{a} , zum Beispiel $\vec{a} = \vec{e}_z$, und schickt die Teilchen durch ihre Messgerät. Für jedes Teilchen notiert sie die Orientierung und das Resultat. Ein typisches Protokoll sieht dann etwa folgendermaßen aus

$$\begin{array}{l|l} 1. & \vec{e}_z+ \\ 2. & \vec{e}_z+ \\ 3. & \vec{e}_z- \\ 4. & \vec{e}_x- \\ 5. & \vec{e}_x+ \\ \vdots & \vdots \end{array} \quad (16.3)$$

Bob verfährt analog. Sein Protokoll liest sich

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_x^- \\ \vec{e}_z^- \end{array} \right. \\
 2. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_z^- \\ \vec{e}_z^+ \end{array} \right. \\
 3. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_z^+ \\ \vec{e}_z^- \end{array} \right. \\
 4. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_z^- \\ \vec{e}_x^- \end{array} \right. \\
 5. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_x^- \\ \vec{e}_x^- \end{array} \right. \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad (16.4)$$

Zu beachten ist dabei, dass immer wenn Alice und Bob die gleiche Orientierung gewählt haben, ihrer jeweiligen Ergebnisse strikt antikorreliert sind. Diese Antikorrelationen zeigen sich allerdings erst, wenn Alice und Bob ihre Ergebnisse vergleichen. Solange sie nur auf ihre eigenen Daten schauen, stellen sie überhaupt keinerlei “Vorhersagbarkeit” fest: wie auch immer die SGM orientiert sind, der jeweils obere und untere Kanal sprechen mit gleicher Häufigkeit an.

Die Antikorrelationen bedeutet allerdings, dass Alice etwas über Bobs Teilchen vorhersagen kann: misst sie mit Einstellung \vec{e}_z , und findet +, so wird Bob – sofern er mit Orientierung \vec{e}_z misst – mit Sicherheit – finden: die $\hat{\tau}_z$ -Eigenschaft dieses Teilchens ist ein Element physikalischer Realität. Würde Alice mit Orientierung \vec{e}_x messen, fände –, so wird Bob – sofern er auch mit Orientierung \vec{e}_x misst – mit Sicherheit + finden: neben der $\hat{\tau}_z$ -Eigenschaft ist auch die $\hat{\tau}_x$ -Eigenschaft ein Element physikalischer Realität. Kurz: Bobs Teilchen hat wohlbestimmte Eigenschaften \hat{b} für alle möglichen Richtungen b . Allerdings kommen wir nach dem derzeitigen Stand der Wissenschaften an diese Liste nicht “dran” (wir können die Liste nicht auslesen). Die Nichtvertauschbarkeit von $\hat{\tau}_z$ und $\hat{\tau}_x$, beispielsweise, bedeutet ja gerade, dass $\hat{\tau}_z$ und $\hat{\tau}_z$ nicht gemeinsam scharfe Werte annehmen können.

Einstein und Mitarbeitern zufolge bedeutet das aber nicht, dass man derartige Listen grundsätzlich niemals auslesen kann. Es bedeutet nur, dass die Quantenmechanik

unvollständig ist. Würde die Beschreibung mit einer Wellenfunktion ψ um einen Satz “verborgener Parameter” λ ergänzt, und wäre man in der Lage diese Parameter zu kontrollieren und gezielt zu manipulieren, wäre man sehr wohl in der Lage die Liste der Eigenschaften auszulösen. Das quantenmechanische Komplementaritätsprinzip würde sich dann als Ergebnis einer Mittelung über die verborgenen Parameter erweisen.

16.2 Bellsche Ungleichungen

Wir bleiben bei den EPR Paaren. In einer lokal-realistischen Beschreibung hat jedes der beiden Teilchen, nachdem es die Quelle verlassen hat, bezüglich \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} wohlbestimmte Eigenschaften. Die konkreten Werte dieser Eigenschaften sind im Sinne Einsteins durch eine gewisse Variable λ bestimmt, deren genaue Gesetzmäßigkeiten uns allerdings bislang verborgen sind.

Berücksichtigt man die strikte Antikorrelation die bei gleicher Wahl der Richtungen \vec{a} und \vec{b} zu beobachten ist schaut man auf folgende Tabelle aller Möglichkeiten:

λ	Alice	Bob
1	N_1	$(\vec{u}_+, \vec{v}_+, \vec{w}_+)$
2	N_2	$(\vec{u}_+, \vec{v}_+, \vec{w}_-)$
3	N_3	$(\vec{u}_+, \vec{v}_-, \vec{w}_+)$
4	N_4	$(\vec{u}_+, \vec{v}_-, \vec{w}_-)$
5	N_5	$(\vec{u}_-, \vec{v}_+, \vec{w}_+)$
6	N_6	$(\vec{u}_-, \vec{v}_+, \vec{w}_-)$
7	N_7	$(\vec{u}_-, \vec{v}_-, \vec{w}_+)$
8	N_8	$(\vec{u}_-, \vec{v}_-, \vec{w}_-)$

Die W'keit, dass Alice bei einer Einstellung \vec{a} das Ergebnis σ_a und Bob bei einer Einstellung \vec{b} das Ergebnis τ_b erhalten sei bezeichnet $p(\vec{a}\sigma_a, \vec{b}\tau_b)$. F'ur die verschiedenen Kombinationen der Einstellungen lesen wir aus der Tabelle ab

$$p(\vec{u}_+, \vec{w}_+) = \frac{N_2 + N_4}{N}, \quad p(\vec{u}_+, \vec{v}_+) = \frac{N_3 + N_4}{N}, \quad p(\vec{v}_+, \vec{w}_+) = \frac{N_2 + N_6}{N}, \quad (16.5)$$

wobei $N = \sum_{\lambda} N_{\lambda}$.

Da $N_{\lambda} \geq 0$ ist

$$N_2 + N_4 \leq (N_3 + N_4) + (N_2 + N_6) \quad (16.6)$$

und also

$$\boxed{p(\vec{u}_+, \vec{w}_+) \leq p(\vec{u}_+, \vec{v}_+) + p(\vec{v}_+, \vec{w}_+)} \quad (16.7)$$

Das sind die Bellschen Ungleichungen f'ur diesen Fall: welcher Mechanismus auch immer den Wert des verborgenen Parameter λ bestimmt, wie auch immer also die relativen H'ufigkeiten N_{λ}/N zustandekommen – in einer lokal-realistischen Theorie gen'ugen die Verbundw'keiten in jedem Fall der Ungleichung ().

Die Rezepturen der Quantenmechanik kennen keine verborgenen Parameter. Die interessierenden W'keiten sind Erwartungswerte von Projektoren,

$$p(\vec{u}_+, \vec{w}_+) \equiv \langle \psi^- | (\hat{1} + \hat{\sigma}_u) \otimes (\hat{1} + \hat{\tau}_w) | \psi^- \rangle \quad (16.8)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\phi_{uw}}{2} \right). \quad (16.9)$$

W'ahlt man die Richtungen \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} derart dass $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{w}) := \phi$ und $\angle(\vec{u}, \vec{w}) = 2\phi$, verletzen die Verbundw'keiten die Bellschen Ungleichungen im Intervall $0 < \phi < \pi/2$. Quantenmechanik und Einstein-lokale Theorien mit verborgenen Variablen machen also verschiedene, experimentell 'uberpr'ufbare Aussagen!

Die Experimente, die Ende der 70er Jahre von Clauser und Mitarbeitern in den USA, insbesondere Anfang der 80er Jahre von Alain Aspect und Mitarbeitern in Frankreich durchgeführt wurden, haben die Verletzung der Bellschen Ungleichungen bestätigt. Die Hypothese von Einstein, Podolsky und Rosen ist also nicht haltbar: Einstein-lokale realistische Theorien sind mit dem Experiment nicht verträglich.

Die Verletzung der Bellschen Ungleichungen bedeutet, dass es Korrelationen gibt, die nicht lokal und realistisch interpretiert werden können. Solche Korrelationen nennt man *EPR-Korrelationen*, von Einstein genannt *spukhafte Fernwirkungen* (engl *spooky action at a distance*). Die Quantenmechanik sagt solche Korrelationen vorher. Sie befindet sich in Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden.

Man könnte nun versucht sein, die EPR-Korrelationen für die überlichtschnelle Datenübertragung zu verwenden, sog. *Bellsches Telephon*. Das aber geht nicht: Die einzelnen Messreihen von Alice oder Bob lassen keinerlei Rückschlüsse auf die Verhältnisse am jeweils anderen Ort zu. Erst die nachträgliche Bestimmung der $p(\vec{a}\vec{\sigma}_a, \vec{b}\vec{\sigma}_b)$ aus den beiden, nun bereits erhobenen Messprotokollen, zeigt die EPR-Korrelationen. Das "Bellsche Telephon" ist eine unmögliche Maschine.

Die EPR-Korrelationen sind aber nicht völlig nutzlos. Mit ihrer Hilfe können durchaus Absichten realisiert werden, die dem "gesunden Menschenverstand" widersprechen. Beispielsweise kann man mit ihrer Hilfe zwei Bits an Information in einem einzigen Bit kodieren – gemäß den Theoremen der klassischen Informatik ein schlichtes Ding der Unmöglichkeit. Oder man kann quantenmechanische Zustände "teleportieren" – also allein mittels Übertragung zweier klassischer Bits von einem Ort zum anderen transportieren.