Theoretische Physik III (Lehramt)
- SoSe 2017 -

Übungsblatt 01 ($34 + \pi + e$ Punkte)[1]

Ausgabe 18.04.17 – Abgabe 25.04.17 – Besprechung 26.04.2017

▷ Aufgabe 1 (Lokalisierter Zustand)[2] (8 Punkte)

Gegeben eine Wellenfunktion in der Ortdarstellung

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t} \tag{1}$$

worin A, λ und ω positive Konstanten.

(a) Wie ist A zu wählen, damit Ψ normiert? Welche Bedeutung hat ω?

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $\hat{q}$ und $\hat{q}^2$. Zur Erinnerung: $\hat{q}$ ist der Ortsoperator, erklärt $(\hat{q}\Psi)(x,t) = x\Psi(x,t)$.

(c) Bestimmen Sie die Standardabweichung von $\hat{q}$. Skizzieren sie den Funktionsgraphen von $|\Psi|^2$ als Funktion von x. Markieren Sie die Punkte $(\langle\hat{q}\rangle+\sigma)$ und $(\langle\hat{q}\rangle-\sigma)$. Machen Sie sich ein Bild in welchem Sinne σ die Streuung bzw Unschärfe von $\hat{q}$ beschreibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss bei einer Ortsmessung ein Messwert außerhalb dieses Bereichs erwartet werden?

(d) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Impulsmessung (zur Erinnerung: Fouriertransformation!). Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{p}\rangle$. Versuchen Sie auch die Varianz zu berechnen. Welche Probleme treten auf?

▷ Aufgabe 2 (Lineares Molekül) ($6 + e$ Punkte)

In einem einfachen Modell eines linearen Moleküls kann sich das Leuchtelektron effektiv nur in einer Dimension bewegen. Der Konfigurationsraum des Elektrons ist das Intervall $X = [-a/2, a/2]$, seine Wellenfunktion von der Form

$$\Psi(x,t) = c_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\varphi_0(x) + c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\varphi_1(x)\,, \tag{2}$$

worin c_0, c_1 komplexe Zahlen, und φ_0, φ_1 sog *Orbitale*

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\pi x/a)\,, \qquad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(2\pi x/a)\,, \tag{3}$$

für $x \in [-a/2, a/2]$, und $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$ für $x \notin [a/2, -a/2]$.

(a) Bestätigen Sie, dass

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \tag{4}$$

die Normierung garantiert.

---

[1]Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2]Problem 1.8 in Griffiths *Introduction to quantum mechanics*

(b) Beschreiben Sie – in Worten – wo das Elektron im Fall $c_1 = 0$ bzw. $c_0 = 0$ vornehmlich angefunden wird.

(c) Bestätigen Sie, dass im allgemeinen Fall die W'keitsdichte für eine Ortmessung

$$|\Psi(x,t)|^2 = |c_0|^2|\varphi_0(x)|^2 + |c_1|^2|\varphi_1(x)|^2 + c_0^* c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0^*(x)\varphi_1(x) + c_0 c_1^* e^{+\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0(x)\varphi_1^*(x)\,. \tag{5}$$

Welcher der Terme verschließt sich einer klassischen Interpretation "hat mit W'keit $|c_0|^2$ eine Dichte $|\varphi_0(c)|^2$ und mit W'keit $|c_1|^2$ eine Dichte $|\varphi_1(x)|^2$"?

(d) Für $c_0c_1 \neq 0$ oszilliert die W'keitsdichte als Funktion der Zeit. Mit welcher Frequenz? Machen Sie sich ein Bild für den Spezialfall $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/\sqrt{2}$ indem Sie die W'keitsdichte zu einigen aussagekräftigen Zeitpunkten t_i plotten.

(e) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der Ortsverteilung. Mittelwert und Varianz sind zeitabhängig. Machen Sie sich ein Bild (Plot!) für den Spezialfall $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$.

Als kleine "Zusatzübung", für die wie großzügig e Punkte vergeben:

(e) Bestimmen Sie nun die Wellenfunktion und W'keitsdichte in der Impulsdarstellung. Beachten Sie, dass der Konfigurationsraum das Intervall $[-a/2, a/2]$, außerhalb dieses Intervalls also $\Psi(x,t) = 0$.

(f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Impulsverteilung. Plotten Sie Ihr Resultat für den in (c) angegebenen Spezialfall. Was ergibt sich für das Produkt der Orts- und Impulsvarianz?

▷ Aufgabe 3 (Kohärente Zustände) (10 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Eigenvektoren von $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ kennengelernt, sog *Fockzustände* $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ (in Ortsdarstellung $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$). Fockzustände, daran darf ich Sie erinnern, sind die stationären Zustände des harmonischen Oszillators.

Bei den stationären Zuständen bewegt sich bekanntlich nichts. Nun hat man beim harmonischen Oszillator aber immer ein schwingendes Teilchen vor Augen. Um dieses Bild auch in der Quantenmechanik wieder zu finden, muss die zeitliche Entwicklung linearer Überlagerungen von Fockzuständen studiert werden. Und eine besonders wichtige Klasse von solchen linearen Überlagerungen sind die sog *kohärenten Zustände*,

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\,, \tag{6}$$

worin $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

(a) Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist Eigenvektor des Vernichtungsoperators zum Eigenwert α,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{7}$$

Im Folgenden verwenden wir geeignete Einheiten für Ort $\hat{q}$ und Impuls $\hat{p}$, so daß $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ mit $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Zeigen Sie:

(b) Erwartungswerte von Ort und Impuls im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ lauten

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*)\,, \tag{8}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha)\,, \tag{9}$$

(c) $|\alpha\rangle$ ist Zustand minimaler Unschärfe, $\delta_\alpha q \delta_\alpha p = 1/2$.

(d) Die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle$ ist eine um $\langle q \rangle$ zentrierte Gaussfunktion der Breite $1/\sqrt{2}$ und Phasenfaktor $e^{i\langle \hat{p} \rangle x}$.

Hinweis: Besinnen Sie sich auf die Vorlesung und wie da die Ortsdarstellung des Grundzustands gewonnen wurde.

(e) Studieren Sie nun die Dynamik des kohärenten Zustands eines harmonischen Oszillators. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der harmonische Oszillator in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, daß der harmonische Oszillator dann auch zu irgendeinem späteren Zeitpunkt in einem kohärenten Zustand ist. Bestimmen Sie die Amplitude $\alpha(t)$. Machen Sie sich ein Bild von $\alpha(t)$ (komplexe Ebene benutzen!) und $|\langle x|\alpha(t)\rangle|$. Genießen Sie die augenfällige Übereinstimmung mit dem Bild vom schwingenden Teilchen. Machen Sie sich klar, dass die komplexe α-Ebene im engen Zusammenhang mit dem klassischen Phasenraum steht.

Im Kontext der Elektrodynamik/Quantenoptik heißen Ort und Impuls Quadraturamplituden; "Ort" entspricht dabei der elektrischen Feldstärke, "Impuls" ihrer zeitlichen Ableitung. Der Operator $\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ heißt Photonenzahloperator. Zeigen Sie:

(f) Im kohärenten Zustand ist die Photonenzahl Poisson-verteilt,

$$P(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!\,; \tag{10}$$

(g) Erwartungswert und Quadratvarianz der Photonenzahl im kohärenten Zustand sind

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 \tag{11}$$

$$\Delta_\alpha^2 n = |\alpha|^2 \tag{12}$$

▷ Aufgabe 4 (Paulimatrizen und Spin-1/2) (8 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i\,, \qquad i = x, y, z \tag{14}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_i$, bzw. $\hat{s}_i$, als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_i$, $i = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\hat{\sigma}_k\,, \qquad \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = i\hat{1}\,, \qquad (ijk = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{15}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{16}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet. Was sind denn die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(e) Nun seien $\vec{a}, \vec{b}$ Euklidische Vektoren (nicht unbedingt Einheitsvektoren). Zeigen Sie

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\hat{\vec{\sigma}}\,. \tag{17}$$

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ Aufgabe 5 (Noch mehr Spinologie . . .) (2 Punkte)

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi\vec{n}} := \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\phi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}\right\} \tag{18}$$

wobei $\vec{n}$ Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet $\hat{U}$ in der Standard-Matrixdarstellung?

Hinweis: Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e-Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (16) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig . . .