Theoretische Physik III (Lehramt)
- SoSe 2017 -

Übungsblatt 02 (20 Punkte)

Ausgabe 26.04.17 – Abgabe 09.0517 – Besprechung 10.05.2017

▷ Aufgabe 1 (HO mit Heisenberg) (8 Punkte)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Ehrenfest'sches Theorem) (8 Punkte)

Bewegen sich die Zustände, so bewegen sich auch die Erwartungswerte. Für den Massepunkt mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ gilt hier das

Satz (Ehrenfest'sches Theorem I) Die klassische Bewegungsgleichung der Newton'schen Mechanik gilt *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{F}\rangle \tag{2}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial\hat{q}}\,. \tag{3}$$

Beweisen Sie das Ehrenfestsche Theorem I. Genießen Sie anschließend die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton'sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle\hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise:

Satz (Ehrenfest'sches Theorem II) Für genügend langsam veränderliche Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\delta_\psi^2 q F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{4}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle\hat{q}\rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$.

Auch dieses Theorem bitten wir Sie zu beweisen. “Genügend langsam veränderlich” heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle \hat{q} \rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ **Aufgabe 3 (Länderfusion Berlin-Brandenburg)** (2 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand ϕ, in Berlin im Zustand χ. Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll “Fritzchen”, die Berliner das ihrige zärtlich “Marlene”. In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \tag{5}$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \tag{6}$$

notiert werden, und von “Fritzchen” und “Marlene” dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

▷ **Aufgabe 4 (Gesellige Bosonen)** (2 Punkte)

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustande $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunen werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...