Theoretische Physik III (Lehramt)
- SoSe 2017 -

Übungsblatt 04 ($20 + \pi + e$ Punkte)[1]

Ausgabe 31.05.17 – Abgabe 21.06.17 – Besprechung 21.06.2017

▷ Aufgabe 1 (Galtonsches Brett) (3 Punkte)

Das Galtonsche Brett ist ein senkrecht aufgestelltes Nagelbrett, in das N horizontale, gleich lange Reihen gleichartiger Nägel eingeschlagen sind, so dass die Nägel aufeinanderfolgender Reihen genau in der Mitte zwischen denen der darüber befindlichen angeordnet sind. Oberhalb der ersten Nagelreihe in der Mitte befindet sich ein Trichter, aus dem Kugeln herausgelassen werden, die die Nagelreihen durchlaufen. Unter der letzten Reihe befinden sich Fächer, die die Kugeln aufnehmen. Welche Kurve wird durch die unterschiedliche Füllung der Fächer beschrieben?
Hinweis: Analysieren Sie das System indem Sie es zunächst auf die ein-dimensionale diskrete Zufallsbewegung abbilden, bei dem ein Teilchen bei jedem Schritt mit gleicher W'keit um die Distanz a nach links oder rechts hüpft.

▷ Aufgabe 2 (Phasenraumportrait) (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorien für ein Teilchen,

(a) das sich mit Energie E in einem eindimensionalen, unendlich hohen Kastenpotential bewegt ("Teilchen in der $1D$-Kiste");

(b) das sich in einem Wellblechpotential

$$V(q) = V_0 \cos(k_0 q) \tag{1}$$

bewegt, wobei hier mindestens drei Trajektorien von Interesse: $E < V_0$, $E = V_0$ und $E > V_0$.

(c) In welchem physikalischen System ist der Fall (b) realisiert?

▷ Aufgabe 3 (Ideales Gas im Mikrokanonischen Ensemble) (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde auf den Spuren Boltzmanns die Entropie definiert

$$S := k_{\mathrm{B}} \ln \Omega\Delta \tag{2}$$

worin Ω das Zustandsintegral und Δ ein kleines Energieintervall, und es wurde die Definitionen der Temperatur und des Drucks angegeben,

$$\frac{1}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}, \qquad \frac{p}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}. \tag{3}$$

[1]Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Ausgehend vom Mikrokanonischen Zustandsintegral des idealen Gases im Grenzfall großer Teilchenzahl

$$\Omega(E,V,N) = \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{\frac{5N}{2}} \tag{4}$$

beweise man die *Sackur-Tetrode Gleichung*

$$S(E,V,N) = k_\mathrm{B} \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}\right] , \tag{5}$$

die *kalorische Zustandsgleichung*

$$E = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T \tag{6}$$

und die *thermische Zustandsgleichung*

$$pV = N k_\mathrm{B} T \tag{7}$$

▷ **Aufgabe 4 (Grenzen der klassichen Physik)** (5 Punkte)

Sie bestätige leicht, dass die Entropie eines idealen Gases als Funktion von T und V die Gestalt annimmt

$$S(T,V,N) = k_\mathrm{B} \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_\mathrm{B} T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}\right] . \tag{8}$$

Auch bestätigen Sie schnell, dass die Entropie für $T \to 0$ nach unten unbeschränkt, und damit im Widerspruch zum Nernstschen Wärmetheorem. Insbesondere wird S unterhalb einer gewissen Temperatur T^* negativ, was als Hinweis gedeutet werden kann, dass für genügend tiefe Temperaturen die klassische Mechanik durch die Quantenmechanik abgelöst werden sollte.

(a) Der in (8) auftretende Faktor $(V/N)^{1/3}$ definiert eine Längenskala *mittlerer Teilchenabstand* (warum?). Auch der Faktor $h^2/(2\pi m k_\mathrm{B} T)$ definiert eine Längenskala, wählt man h =Plancksches Wirkungsquantum genannt die *thermische DeBroglie-Wellenlänge*. Motivieren Sie diese Namensgebung (erinnern Sie sich an die Energie-Impulsbeziehung, die thermische Zustandsgleichung, und die DeBroglie-Beziehung "Impuls gleich h durch Wellenlänge").

(b) Die thermische DeBroglie Wellenlänge ist ersichtlich Temperaturabhängig – je tiefer die Temperatur, desto grß̈er die thermische DeBroglie-Wellenlänge. Es gibt daher einer Temperatur T^*, so dass für $T < T^*$ die Entropie negativ. Berechnen Sie T^*.

(c) Von welcher Ordnung im mittleren Teilchenabstand ist die thermische DeBroglie-Wellenlänge für T^*? Formulieren Sie einen Merksatz aus dem hervorgeht unter welchen Bedingungen die klassiche Beschreibung des idealen Gases ungültig wird und durch eine quantenmechanische Beschreibung abgelöst werden muss.

(d) Woran, glauben Sie, liegt es, dass die klassische Beschreibung bei tiefen Temperaturen defezitär wird? Wird der $1/N!$-Faktor im Gibbsschen Phasenraumvolumen der Ununterscheidbarkeit bei genügend tiefen Temperaturen wirklich gerecht?

▷ Aufgabe 5 (Kinderspiel) (4 Punkte)

Die barometrische Höhenformel und die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung im kanonischen Ensemble abzuleiten ist ein Kinderspiel zu dem wir Sie herzlich einladen.

▷ Aufgabe 6 (Stirlingsche Formel) (2 Punkte)

Bekanntlich $N! \approx N^N$, bzw etwas genauer

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \text{ asymptotisch für } N \to \infty\,, \tag{9}$$

genannt *Stirlingsche Formel.*

Beweisen Sie (9), indem Sie von der Integraldarstellung $N! = \int_0^\infty x^N e^{-x} dx$ ausgehen (Beweis?), zunächst feststellen, dass der Integrand $f(x)$ ein scharf ausgeprägtes Maximum bei $\tilde{x} = N$, sich sodann die Identität $f(x) = e^{\ln f(x)}$ in Erinnerung rufen, und den Exponenten in einer Taylorreihe um die Stelle $\tilde{x}$ herum entwickeln. Den Quadratischen Term $\propto (x - \tilde{x})^2$ lassen Sie im Exponenten stehen (hach wie hübsch – mal wieder ein Gauss!), die Exponentialfunktion der Terme höherer Ordnung entwickeln Sie in einer gewöhnlichen Taylorreihe – aber erst nachdem Sie sich klar gemacht haben, dass Sie das für die Stirlingsche Näherung ja garnicht müssen – weil Sie halt nur Beiträge liefern, die im Grenzfall $N \to \infty$ nichts beitragen ...

▷ Aufgabe 7 (Schach und Shannon) ($\pi + e$ Punkte)

Die Shannon Definition der Informationsgehalts einer Nachricht basiert auf Hartleys Definition

$$I_{\mathrm{H}} = \log_2(\text{Zahl der möglichen Nachrichten}) \text{ bit} \tag{10}$$

vorausgesetzt, alle Nachrichten haben gleiche Länge und treten mit der gleichen W'keit auf.

(a) Für eine Quelle, die Nachrichten der Länge L mit Buchstaben im binären Alphabet $\{0, 1\}$ verschickt – wieviele mögliche Nachrichten gibt es? Wie groß ist die Hartley-Information?

(b) Wievieler Antworten auf Ja/Nein-Fragen bedarf es, um die Königin auf einem Schachbrett zu lokalisieren? Welche Fragen wären das?

Die Shannon Definiton lautet

$$I_{\mathrm{S}} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2(p_i) \text{ bit} \tag{11}$$

worin M die Zahl der möglichen Nachrichten, und $p_i \geq 0$ die W'keit, dass Nachricht Nr. i verschickt wird, $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$. Zeigen Sie, dass

(c) die Shannon-Information nicht-negativ, kleiner-gleich der Hartley-Information, mit Gleichheit (also maximal) im Fall der Gleichverteilung $p_i = 1/M$.

(d) die Shannon-Information gleich Null falls eine Nachricht i_0 mit Sicherheit gesendet wird, $p_{i_0} = 1$, alle anderen $p_i = 0$. Wie passt $I_{\mathrm{S}} = 0$ zur umgangssprachlichen Bedeutung von "Information gleich Null!"?

Die Shannon-Information, auch genannt *Shannon-Entropie* ist für die Nachrichtentechnik von unschätzbarer Bedeutung: Haben Sie eine Nachrichtenquelle mit Shannon-Entropie I_S, dann gibt es einen Kode (Abbildung) in das binäre Alphabet, so dass die kodierten Nachrichten im Mittel nicht länger sind als $I_\mathrm{S}/\mathrm{bit}$ bit. Bemerken Sie die – durchaus beabsichtigte – Mehrdeutigkeit des Wörtchen "bit"?