Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 02 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 16.04.18 – Abgabe 24.04.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Teilchen in der Kiste)* (8 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon\left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2\right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots , \tag{1}$$

mit $\epsilon = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L}\right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x)\sin(k_m y)\sin(k_n z)\,, \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc}\,, \tag{2}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert.

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus?
Zur Erinnerung: “Druck” ist “Kraft pro Fläche”. “Kraft” ist “Arbeit pro Wegstrecke”, und “Arbeit” ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen durch umherfliegende Melonenkerne nicht in Lebensgefahr zu geraten? Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind – was sie ja auch sind, vgl. Abbildung.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

▷ **Aufgabe 2 (Ein kleiner Satz)** (3 Punkte)

Sei $\hat{T}$ linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, und $\hat{T}^\dagger$ der zu $\hat{T}$ adjungierte Operator. Beweisen Sie die nützliche Ungleichung

$$\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle \geq 0\,. \tag{3}$$

▷ **Aufgabe 3 (Unschärferelationen)** (4 Punkte)

Sie erinnern sich an die Varianz (Unschärfe) einer Observable, $\delta A := [\langle(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2\rangle]^{1/2}$.

Seien nun $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}\,. \tag{4}$$

Beweisen Sie die folgend wichtige Ungleichung für das Produkt der Varianzen

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|\,. \tag{5}$$

Hinweis: Machen Sie von Aufgabe 1 Gebrauch. Setzen Sie dort $\hat{T} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle + i\lambda(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)$ und minimieren bezüglich λ.

▷ **Aufgabe 4 (Zustand minimaler Unschärfe)** (5 Punkte)

Für ein Punktteilchen im $\mathbb{R}$ mit kanonischem Kommutator $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ wird aus Aufgabe 2 die *Heisenberg'sche Unschärferelation*,

$$\delta q \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{6}$$

Ein Zustand bei dem hier Gleichheit herrscht heißt *Zustand minimaler Unschärfe* (engl: minimum uncertainty state). Zeigen Sie, daß der allgemeinste Zustand minimaler Unschärfe in der Ortsdarstellung durch eine Gaussfunktion beschrieben wird.

Hinweis: Betrachte Beweis zu Aufgabe 3. Setze o.B.d.A. $\langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$; minimal heißt dann neben $\lambda = \hbar/(2\delta p^2)$ auch $\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle) = 0$, also $\hat{T}\psi_{\min} = 0$. Auswertung dieser Gleichung in Ortsdarstellung (wo $(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x)$ und $(\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\psi'(x)$) liefert den gesuchten Beweis.

▷ **Aufgabe 5 (Quantendiffusion)** (π Punkte)

Ihr Freund ist besorgt. Er schläft in einem Hochbett und befürchtet, aufgrund der Quantendiffusion (Zerfließen seines Wellenpaketes) morgens auf dem Boden aufzuwachen (möglicherweise, so seine konkrete Befürchtung, mit blauen Flecken).

(a) Versuchen Sie, Ihren Freund zu beruhigen.
Hinweis: Modellieren Sie Ihren Freund als Gauss'sches Wellenpaket. Benuzen Sie die Relation $m\Delta v^2/2 \sim k_\mathrm{B}T$, die Sie in der statistischen Mechanik kennenlernen werden, um die anfängliche Geschwindigkeits-Unschärfe Ihres Freundes der Masse m mit seiner Körpertemperatur T in Beziehung zu setzen (k_B ist die Boltzmann-Konstante).

(b) Wie lange müsste Ihr Freund gewohnheitsmäßig schlafen, um im Mittel jedes zweite mal neben seinem Bett aufzuwachen?

(c) Geben Sie eine Einschätzung ob die unter (b) gefundene Antwort realistisch erscheint. Begründen Sie Ihre Einschätzung. Sollten Sie zum Schluss kommen "unrealistisch" – woran könnte das liegen, also: an welcher Stelle ist das Modell inadäquat?