Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 04 (20 Punkte)

Ausgabe 30.04.18 – Abgabe 08.05.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Anschlussbedingung im δ-Potential)* (2 Punkte)

Für die stationäre Schrödingergleichung $E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + b\delta(x-a)\right]\psi(x)$, mit δ "Deltafunktion", leite man die sog *Anschlussbedingung* bei $x = a$ her,

$$\psi'(a_+) - \psi'(a_-) = \frac{2mb}{\hbar^2}\psi(a)\,, \tag{1}$$

worin $\psi'(a_\pm) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{d\psi}{dx}|_{x=a\pm\varepsilon}$.

Hinweis: Integrieren Sie die Stationäre Schrödingergleichung $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$. Benutzen Sie, dass ψ beschränkt und stetig, auch bei $x = a$.

▷ Aufgabe 2 (Kronig-Penney Modell) (10 Punkte)

Ein Elektron in einem Metall "sieht" ein periodisches Potential. Obgleich seine Bewegung unbegrenzt ist, sind aufgrund der Periodizität des Potentials nur bestimmte Energiebänder erlaubt.

(a) Bestimmen Sie die elektronische Bandstruktur für das sog Kronig-Penney Modell,

$$V(x) = \alpha \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - ja) \tag{2}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich beizeiten an das Bloch'sche Theorem. Die Blochfunktion berechnen Sie zweckmässigerweise im Intervall $(0, a]$. Da steht dann nur eine Deltafunktion, und zwar am rechten Intervallende. Die verarzten Sie dann einfach über die Anschlussbedingung im δ-Potential.

(b) Machen Sie sich ein Bild der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons für stationre Zustände an der oberen bzw unteren Bandkante im "anziehendem" Potential, $\alpha < 0$.

▷ Aufgabe 3 (Kohärente Zustände) (8 Punkte)

In der Vorlesung zum harmonischen Oszillator haben Sie die Eigenvektoren von $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ kennengelernt, sog *Fockzustände* $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ (in Ortsdarstellung $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$). Fockzustände, daran darf ich Sie erinnern, sind die stationären Zustände des harmonischen Oszillators.

Bei den stationären Zuständen bewegt sich bekanntlich nichts. Nun hat man beim harmonischen Oszillator aber immer ein schwingendes Teilchen vor Augen. Um dieses Bild auch in der Quantenmechanik wieder zu finden, muss die zeitliche Entwicklung linearer Überlagerungen von Fockzuständen studiert werden. Und eine besonders wichtige Klasse von solchen linearen Überlagerungen sind die sog *kohärenten Zustände*,

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,, \tag{3}$$

worin $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

(a) Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist Eigenvektor des Vernichtungsoperators zum Eigenwert α,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{4}$$

Im Folgenden verwenden wir geeignete Einheiten für Ort $\hat{q}$ und Impuls $\hat{p}$, so daß $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ mit $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Zeigen Sie:

(b) Erwartungswerte von Ort und Impuls im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ lauten

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \,, \tag{5}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \,, \tag{6}$$

(c) $|\alpha\rangle$ ist Zustand minimaler Unschärfe, $\delta_\alpha q \delta_\alpha p = 1/2$.

(d) Die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle$ ist eine um $\langle q\rangle$ zentrierte Gaussfunktion der Breite $1/\sqrt{2}$ und Phasenfaktor $e^{i\langle\hat{p}\rangle x}$.

<u>Hinweis:</u> Besinnen Sie sich auf die Vorlesung und wie da die Ortsdarstellung des Grundzustands gewonnen wurde.

(e) Studieren Sie nun die Dynamik des kohärenten Zustands eines harmonischen Oszillators. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der harmonische Oszillator in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, daß der harmonische Oszillator dann auch zu irgendeinem späteren Zeitpunkt in einem kohärenten Zustand ist. Bestimmen Sie die Amplitude $\alpha(t)$. Machen Sie sich ein Bild von $\alpha(t)$ (komplexe Ebene benutzen!) und $|\langle x|\alpha(t)\rangle|$. Genießen Sie die augenfällige Übereinstimmung mit dem Bild vom schwingenden Teilchen. Machen Sie sich klar, dass die komplexe α-Ebene im engen Zusammenhang mit dem klassischen Phasenraum steht.

Im Kontext der Elektrodynamik/Quantenoptik heißen Ort und Impuls Quadraturamplituden; "Ort" entspricht dabei der elektrischen Feldstärke, "Impuls" ihrer zeitlichen Ableitung. Der Operator $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ heißt Photonenzahloperator. Zeigen Sie:

(f) Im kohärenten Zustand ist die Photonenzahl Poisson-verteilt,

$$P(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n! \,; \tag{7}$$

(g) Erwartungswert und Quadratvarianz der Photonenzahl im kohärenten Zustand sind

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 \tag{8}$$

$$\Delta_\alpha^2 n = |\alpha|^2 \tag{9}$$