Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -
Übungsblatt 05 ($20 + \pi + e$ Punkte)[1]
Ausgabe 14.05.17 – Abgabe 22.05.17 – Besprechung n.V.
Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Vektoroperatoren) (6 Punkte)

Der Bahndrehimpuls, daran sei erinnert, ist definiert

$$\hat{\vec{\ell}} := \hat{\vec{q}} \times \hat{\vec{p}}. \tag{1}$$

Unter Verwendung der Heisenbergkommutatoren

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\,, \qquad i,j = x,y,z \tag{2}$$

beweise man die Drehimpulskommutatoren

$$\left[\hat{\ell}_i, \hat{\ell}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{\ell}_k\,, \tag{3}$$

$$\left[\hat{\ell}_i, \hat{q}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{q}_k\,, \tag{4}$$

$$\left[\hat{\ell}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k\,. \tag{5}$$

Bemerkung: Ganz allgemein heißen drei Operatoren $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ die Komponenten (besser: Koordinaten) eines Vektoroperators, wenn ihre Kommutatoralgebra à la (4).

▷ Aufgabe 2 (Spinmatrizen) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die drei sog. Spin-Matrizen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

der Drehimpulsalgebra (1) genügen. Was haben die mit der Darstellung des Bahndrehimpulses auf dem Vektorraum(!) der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ zur Quantenzahl $\ell = 1$ zu tun?

▷ Aufgabe 3 (Drehimpulsunschärfen) (3 Punkte)

Berechnen Sie die Varianzen der x- und y-Komponenten des Drehimpulses in Standardzuständen $|jm\rangle$.

▷ Aufgabe 4 (Wasserstoff – Erwartungswerte) (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Erwartungswerte für den mittleren Abstand und die mittlere Coulombenergie im Wasserstoff durch

$$\langle\hat{r}\rangle_{nlm} = \left[3n^2 - l(l+1)\right]a_0/2\,, \qquad \left\langle\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hat{r}}\right\rangle_{nlm} = \frac{e^2}{n^2a_0} \tag{7}$$

gegeben sind, wobei a_0 Bohr'scher Radius.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 5 (Messwertverteilungen Wasserstoffelektron)** (5 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes eines Wasserstoffelektrons (ohne Spin) kennengelernt,

$$\psi_{1,0,0}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} , \tag{8}$$

wobei a_0 Bohr'scher Radius.

(a) Wie lautete die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Ortsmessung das Elektron im Abstand a vom Kern zu finden? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte! (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion des Grundzustandes in der Impulsdarstellung durch

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{1}{a_0^{5/2}} \frac{1}{\left(k^2 + a_0^{-2}\right)^2} \tag{9}$$

gegeben ist. (2 Punkte)

(c) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Messung des Relativimpulses $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ die Wellenzahl $k = |\vec{k}|$ zu finden? (2 Punkte)

▷ **Aufgabe 6 (Qubit)** (e Punkte)

Das "Bit" ist bekanntlich das Elementarteilchen der Informatik: Sein Konfigurationsraum umfasst nur die beiden Zustände "gesetzt" (symbolisch 1) und "ungesetzt" (symbolisch 0). Wird das Bit quantisiert, erhält man das Elementarteilchen der Quanteninformatik, genannt "Qubit".

Der Hilbertraum des Qubit ist zweidimensional – das Qubit ist gewissermaßen das kleinste nicht-triviale quantemechanische System. Physikalisch realisieren lassen sich Qubits durch den Spin eines Elektrons, den Polarisationsfreiheitsgrad eines Photons, oder zwei Energieniveaus eins Atoms.

Die klassischen Zustände 1 und 0 werden im Qubit-Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{qubit}}$ durch die beiden orthonormalen Basisvektoren $|1\rangle$ und $|0\rangle$ dargestellt, genannt die "Computer-Basis". Gemäß Superpositionsprinzip ist aber auch die Superposition

$$|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle , \tag{10}$$

ein möglicher Zustand des Qubit. Die Koeffizienten $\psi_i \in \mathbb{C}$ bilden die Darstellung in der Computer-Basis,

$$\psi_i = \langle i|\psi\rangle , \tag{11}$$

und werden folgendermaßen interpretiert:

$$|\psi_i|^2 = \text{W'keit, das Qubit gesetzt } (i = 1) \text{ bzw ungesetzt } (i = 0) \text{ zu finden} \tag{12}$$

Um sich das Leben (und Schreiben) etwas zu erleichtern, werden Qubits gerne in einer Matrixdarstellung beschrieben. Die Darstellung ist definiert durch eine Abbildung $\mathcal{H}_{\text{qubit}} \to \mathbb{C}^2$

$$|0\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad |1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Die Manipulation eines Bits wird in der Informatik durch Gatter erreicht. Ein Gatter, das als Input ein Bit nimmt, und als Output wiederum ein Bit liefert, heißt unäres Gatter. Mathematisch formuliert ist ein unäres Gatter eine Abbildung

$$g : \{0, 1\} \quad \rightarrow \quad \{0, 1\} \tag{14}$$

(a) Zeigen Sie: es gibt genau 4 unäre Gatter.

(b) Zeigen Sie: Die einzigen reversiblen Gatter sind die Identität (hier bezeichnet IDT) und das logische NOT. Ein reversibles Gatter ist ein Gatter, bei dem Sie bei Kenntnis des Output auf den Input schließen können.

(c) Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Informatik*: Es gibt kein unäres Gatter $\sqrt{\mathrm{NOT}}$, das in Hintereinanderschaltung das NOT realisiert.

In der Quanteninformatik werden reversible unäre Gatter durch unitäre Operatoren dargestellt, und das Hintereinanderschalten von logischen Gattern entspricht der Multiplikation der zugeordneten Operatoren. In der Matrixdarstellung sind Gatter einfach unitäre 2×2-Matrizen. Hintereinanderschaltung ist also einfach Matrixmultiplikation.

(d) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\hat{U}_{\mathrm{NOT}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

ist unitär und realisiert das logische NOT für Qubits.

(e) Zeigen Sie: der Fundamentalsatz der Informatik wird mit Qubits außer Kraft gesetzt. Es gibt sehr wohl ein unäres Gatter $\hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}$, das in Hintereinanderschaltung das logische NOT realisiert, $\hat{U}_{\mathrm{NOT}} = \hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}\hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}$. Welche Matrix ist diesem Gatter zugeordnet?

▷ **Aufgabe 7 (Quantenhexerei)** (π Punkte)

Im Nachklang zur Walpurgisnacht erreicht Sie eine SMS:

Take a friend, go to the bar, get a drink and play a game:

Place a coin head up in a box. Seal the box so that nobody can look inside. You will now take three turns, first you, then your friend, then you again. At each turn you (or your friend) can manipulate the coin: turn it around, or not turn it around. Of course neither you nor your friend can see the actual state of the coin (heads or tails up). Also, you can't see what action your friend takes (turn or not turn), nor can your friend see what action you take. Once you are done, you may open the box. You win if the coin is still head up in the end. Otherwise your friend wins.

(a) Convince your friend that there is no winning strategy for neither you nor your friend.

(b) Recall quantum mechanics (but don't tell your friend) and win the game – always!

<u>Reference:</u> D. Meyer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052.