Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 06 ($20 + \pi^e$ Punkte)[1]

Ausgabe 28.05.18 – Abgabe 05.05.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die Bewegungsgleichung einer Punktldadung (Masse m, Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, lautet im nicht-relativistischen Regime

$$m\ddot{\vec{q}} = e\left[\vec{E}(\vec{q},t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q},t)\right] . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\right]^2 + e\Phi(\vec{q},t) \tag{2}$$

Hamiltonfunktion zur Bewegungsgleichung (1) (mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

▷ Aufgabe 2 (W'keitsstromdichte Punktladung) (5 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine Punktladung im elektromagnetischen Feld gilt die Kontinuitätsgleichung $\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ mit einer W'keitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right] - \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{x},t)|\psi(\vec{x},t)|^2 . \tag{3}$$

Frage: ist die W'keitsstromdichte eichinvariant (sieht ja nicht so aus ...)?

▷ Aufgabe 3 (Paulimatrizen und Spin-$1/2$)* (8 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i , \qquad i = x, y, z \tag{5}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_i$, bzw. $\hat{s}_i$, als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_i$, $i = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i\hat{\sigma}_k\,, \qquad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = i\hat{1}\,, \qquad (ijk = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{6}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{7}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet. Was sind denn die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(e) Nun seien $\vec{a}, \vec{b}$ Euklidische Vektoren (nicht unbedingt Einheitsvektoren). Zeigen Sie

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \hat{\vec{\sigma}}\,. \tag{8}$$

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ Aufgabe 4 (Noch mehr Spinologie . . .)* (2 Punkte)

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi\vec{n}} := \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\phi\vec{n} \cdot \hat{\vec{s}}\right\} \tag{9}$$

wobei $\vec{n}$ Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet $\hat{U}$ in der Standard-Matrixdarstellung?

<u>Hinweis:</u> Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e-Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (7) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig . . .

▷ Aufgabe 5 (Diracs Ladungsquantisierungsargument) (π^e Punkte)

[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung . . .]

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigen* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte $\vec{B}_g$; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{10}$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\mathrm{div}\vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \tag{11}$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential $\vec{A}$ geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \mathrm{rot}\vec{A}$. Wegen div rot $= 0$ wäre in solchen Gebieten dann $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_\mathrm{I} = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{12}$$

wie gewünscht $\mathrm{rot}\vec{A}_\mathrm{I} = \vec{B}_g$. Da $\vec{A}_\mathrm{I}$ für $\vartheta \to \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_I von $\vec{A}_\mathrm{I}$ ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem $\mathbb{R}^3$ auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_\mathrm{II} = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{13}$$

$\mathrm{rot}\vec{A}_\mathrm{II} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_II aus dem $\mathbb{R}^3$ ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_\mathrm{II} - \vec{A}_\mathrm{I} = -\frac{2g}{4\pi}\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi\,. \tag{14}$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_\mathrm{II} - \vec{A}_\mathrm{I} = \mathrm{grad}\chi \tag{15}$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi}\varphi\,. \tag{16}$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_\mathrm{II} = \exp\left\{-i\frac{2eg}{4\pi\hbar}\varphi\right\}\psi_\mathrm{I}\,. \tag{17}$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{18}$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktiksumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ steht in den Sternen. Hätten Sie eine Idee, wie die Maxwell'sche Theorie zu erweitern wäre, wenn sich herausstellt, dass es tatsächlich magnetische Monopole gibt?