# Theoretische Physik III
# - Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 08 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 11.06.18 – Abgabe 19.06.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

---

## ▷ Aufgabe 1 (Länderfusion Berlin-Brandenburg) (6 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand $\phi$, in Berlin im Zustand $\chi$. Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll "Fritzchen", die Berliner das ihrige zärtlich "Marlene". In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \tag{1}$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \tag{2}$$

notiert werden, und von "Fritzchen" und "Marlene" dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

## ▷ Aufgabe 2 (Gesellige Bosonen) (4 Punkte)

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale $\phi$ und $\chi$ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustande $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunen werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3 (Yukawa-Streuung)*** (4 Punkte)

Illustrativ das Beispiel der Streuung am Yukawapotential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \tag{3}$$

für die wir Sie bitten, die Streuampltitude, den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in der ersten Born'schen Näherung zu berechnen. Diskutieren Sie bitte auch den Grenzfall $\mu, V_0 \to 0$ mit $V_0/\mu = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0)$ fest, in dem das Yukawapotential die Form des Coulomb- bzw. Gravitationspotentials annimmt.

▷ **Aufgabe 4 (Elektron-Atom Streuung)** (6 Punkte)

Auch ein beliebtes Schmankerl ist die elastische Streuung von Elektronen an einem neutralen Atom. Das Wechselwirkungspotential ist $V = -e_0\Phi$ ($-e_0$ ist die Ladung des Elektrons), wobei $\Phi$ das elektrostatische Potential des Atoms,

$$\Delta\Phi = -e_0[Z\delta(\vec{x}) - \rho(\vec{x})]/\epsilon_0 \tag{7}$$

worin $Z$ die Kernladungszahl des Atoms, und $\rho$ die Ladungsverteilung seiner Elektronen, $\int d^3x\rho(\vec{x}) = Z$. Bestimmen Sie den einen Ausdruck für den differentiellen Streuquerschnitt in Bornscher Näherung; machen Sie, sofern nötig, vom sog *Formfaktor* der elektronischen Ladungsverteilung Gebrauch,

$$F(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'}\rho(\vec{x}')d^3x' \,. \tag{8}$$

Wenden Sie Ihre Erkenntnisse auf die Streuung von Elektronen an atomarem Wasserstoff im Grundzustand an. Diskutieren Sie den differentiellen Streuquerschnit im Regime großer und kleiner Energien.

Hinweis: Jetzt bloß nicht die Laplacegleichung (7) lösen! In Bornscher Näherung brauchen wir doch nur die Fouriertransformierte des Potentials $\Phi(\vec{x})$ – und dazu reicht es doch, die Laplacegleichung einer Fouriertransformation zu unterwerfen ....

▷ **Aufgabe 5 ($\hbar$ im Labor ...)** ($\pi$ Punkte)

Angenommen Sie haben gerade ein Doppelspaltexperiment zum Nachweis von Materiewellen aufgebaut. Erste Probeläufe mit monochromatischen Teilchen ergeben einen Streifenabstand $a$. Sie lassen das Experiment über Nacht laufen und gehen zu Bett. Am nächsten Morgen lesen Sie in der Zeitung, jemand habe über Nacht den Wert von $\hbar$ geändert, alle anderen Naturkonstanten (Elementraladung $e$, Lichtgeschwindigkeit $c$ etc) jedoch nicht angerührt. Auf dem Weg zum Labor kommen Sie zu der Überzeugung, eine Änderung von $\hbar$ müsse sich in einem veränderten Streifenabstand niederschlagen. "Schließlich" – so Ihr Argument – "bedeute die De-Broglie Beziehung $\lambda = 2\pi\hbar/p$ eine lineare Abängigkeit der Wellenlänge, und damit des Streifenabstandes, von $\hbar$." Vor dem Labor angekommen plagen Sie leise Zweifel. Endgültige Gewissheit bringt nur ein Blick auf die Messdaten – und die besagen WAS?

Bemerkung: Beachten Sie, daß sich bei Änderung von $\hbar$ alle möglichen Dinge ändern, beispielsweise die Größe eines Atoms (gemessen relativ – zu was?). Das einzige was sich sicherlich nicht ändert ist der Wahrheitsgehalt von Aussagen wie "In dieser Kiste befinden sich 17 Kartoffeln".

Sie dürfen sich auch ruhig mal den Spaß machen, andere PhysikerInnen mit der Frage zu belästigen. Beispielsweise Kollegen aus der Experimentalphysik ...