Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 09 ($20+\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 19.06.18 – Abgabe 26.06.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (HO mit Heisenberg) (8 Punkte)

[“Pflicht” und klausurrelevant . . .]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg’schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld) (12 Punkte)

Das “Zwei-Zustands System”, auch genannt “2-Niveau Atom”, “Spin im Magnetfeld” oder “qubit” ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} e^{i\omega t}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2} e^{i\omega t}\hat{\sigma}^\dagger \tag{2}$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

(a) Ich behaupte, die durch $\hat{H}$ beschriebene Dynamik haben Sie schon mal analysiert. Wann war das, und in welchem Kontext?

(b) Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^\dagger$?

(c) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft . . .

(d) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit "ungestörtem" Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t)}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \tag{3}$$

(e) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.

(f) Zum Hamiltonoperator $\tilde{H}$ kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum …

▷ Aufgabe 3 (Prisoners' Dilemma) (π Punkte)

[Für Ihre Sozialkompetenz …]

Take a friend, go to the bar, but don't order drinks immediately. Instead you agree on the following. Whoever orders a drink, must pay for the drink, but the other will enjoy the drink. Enjoying a drink, while the other has nothing gives maximal satisfaction 5 points (yes – it is a nasty game). Suffering without a drink while the other is enjoying his drink gives minimal satisfaction 0 points. Enjoying a drink in company gives 3 points, while joint suffering of both without drink gives 1 point ("at least I am not alone").

Evidently, this is a two-player binary choice game (for each round the choice is "I order a drink" vs "I do not order a drink"), yet in contrast to ordinary board games (or the like), it is "non-zero sum" (contemplate on the outcome "nobody ever orders any drink" vs " both order a drink"). Surprisingly, this game has a solution which is easily found by rational reasoning (assuming that both you and your frind strive for maximal satisfaction). Unfortunately, however, this solution is rather frustrating which is why the game poses a dilemma …

Background: The game runs under the title "Prisoners Dilemma" because, when it was invented in the 1950's, the story which comes with the game plays in the American System of Justice where deals between the various parties (prisoner, lawyer, attorney, judge) are quite common. The PD made some headlines in the eighties when Sociology tried to understand, how in a society of egoist, mutual cooperation (where, in the end, both enjoy their drink) can emerge. It was discovered, that the PD is the paradigm for the interaction between individuals, and the big question was, how the player could escape the Dilemma. In a computer tournament, led by Robert Axelrodt, it turned out that in an iterated PD (where the players play PD several times without knowing in advance, however, how often they will play), so called "Tit-for-Tat" is the most promising strategy: order the drink in the first move, and from then on do whatever your friend did in the previous move. Meanwhile, the games was quantized, see *Q*uantum Games and Quantum Strategies by J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).