Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Übungsblatt 10 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 02.07.18 – Abgabe 10.07.18 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Ehrenfest'sches Theorem) (12 Punkte)

["Pflicht" – und klausurrelevant ...]

Bewegen sich die Zustände, so bewegen sich auch die Erwartungswerte. Für den Massepunkt mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ gilt hier das

Satz (Ehrenfest'sches Theorem I) Die klassische Bewegungsgleichung der Newton'schen Mechanik gilt *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{F}\rangle \tag{1}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial\hat{q}}\,. \tag{2}$$

Beweisen Sie das Ehrenfestsche Theorem I. Genießen Sie anschließend die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton'sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle\hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise:

Satz (Ehrenfest'sches Theorem II) Für genügend langsam veränderliche Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\delta_\psi^2 q F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{3}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle\hat{q}\rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$.

Auch dieses Theorem bitten wir Sie zu beweisen. "Genügend langsam veränderlich" heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle\hat{q}\rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ Aufgabe 2 (8 Punkte)

Seien $\hat{\rho}_0$ und $\hat{\rho}_1$ zwei Zustände. Zeigen Sie, dass dann auch $\hat{\rho}_\lambda = (1-\lambda)\hat{\rho}_0 + \lambda\hat{\rho}_1$ Zustand für jedes λ im Intervall $[0, 1]$, d.h. selbstadjungiert, normiert, nicht-negativ.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3 (Zenos Paradox)** (π Punkte)

Zeno von Elea, ein Vorsokratiker, ist bekannt für seine Paradoxe. Das bekannteste ist vermutlich "Achilles und die Schildkröte": bei einem Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte, bei dem der Schildkröte aus Gründen der Fairneß ein gewisser Vorsprung eingeräumt wird, kann Achilles die Schildkröte nie einholen, denn wann immer er da ankommt, wo die Schildkröte gerade noch war, ist sie schon weiter. Vermutlich haben Sie auch schon gelernt, dass spätestens seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung das Paradox keines mehr ist.

Ein anderes Paradox betrifft fliegende Pfeile – nach Zeno eine Unmöglichkeit: in jedem Moment seines Fluges nimmt der Pfeil einen bestimmten, exakt umrissenen Ort ein. Er ist dort in Ruhe, denn wer sich an *einem* Ort befindet kann sich schließlich nicht bewegen (Bewegung ist "Betreten" oder "Verlassen" eines Ortes, nicht "Befinden"). Da sich also der Pfeil zu jedem Moment offensichtlich in Ruhe befindet, kommt er überhaupt nicht vom Fleck.

Von Pfeilen befreit, und für die Belange der Quantenmechanik formuliert, lautet Zenos Paradox: jeglicher Versuch, die Dynamik eines Systems kontinuierlich zu beobachten, friert das System ein.

Dass die Quantenmechanik genau das liefert soll hier eingesehen werden. Dazu nehmen wir ein resonant getriebenes Zwei-Niveau System (Hamilton wie in Blatt 09, Aufgabe 2). Das System sei zu einem Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|g\rangle$. Zur Zeit t wird eine Zustandsmessung gemacht. Unter der Voraussetzung, dass im Zeitintervall $[0, t]$ keine Messung stattfand, ist dann die Besetzungsw'keit des Grundzustands, daran sei erinnert, gegeben $P_g(t) = \cos(\Omega_0 t)$ entsprechend die Besetzungw'keit des angeregten Zustandes $P_e = 1 - \cos(\Omega_0 t)$.

Was passiert eigentlich, wenn Zustandsmessungen zu Zeiten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \ldots, N$ mit $\Delta t = t/N$ vorgenommen werden? Bestätigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ (also "kontinuierlich nachgucken, in welchem Zustand sich das Atom befindet") das Atom – trotz Antrieb! – im Grundzustand eingefroren ist.

Das "Quanten-Zeno" Paradox – angelsächsisch formuliert "A watched pot never boils" – ist kein Paradox, sondern Wirklichkeit! Dass Zwei-Niveau Systeme sehr wohl im angeregten Zustand sein können befindet sich aber nicht im Widerspruch zu dieser Wirklichkeit. Man muss sie halt nur "in Ruhe lassen" – sprich: eben nicht an ein "permanent-nachgucken-Instrument" koppeln ...

Hinweis: Wenn Sie mit der Aufgabe fertig sind: nutzen Sie doch mal irgendeine Suchmaschine, Stichwort "Zeno Paradox", oder gehen gleich auf Wikipedia. Besser noch: gehen Sie auf die Uni-Seite der Bibliothek, dort auf e-journals, natürlich Physik, klicken sich auf Physical Review A durch, und laden einfach herunter: "Quantum Zeno effect", W. M. Itano et al., Phys. Rev A**41**, 2295 (1990). Da lernen Sie dann, wie man ein "permanten-nachgucken-Instrument" im Labor realisieren kann. Anschließend erfreuen Sie sich an einer Debatte über die Grundlagen der Quantenmechanik: "Comment on 'Quantum Zeno effect' " von L. E. Ballentine, Phys. Rev. A**43**, 5165 (1991); "Reply to 'Comment on Quantum Zeno effect' ' " von W. M. Itano et al, Phys. rev. A**43**, 5168 (1991); "Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet" von V. Frerichs und A. Schenzle, Phys. Rev. A**44**, 1962 (1991).