

Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2018) -

Klausurbeispiel 16.07.2018 (90 Punkte)

Bearbeitungszeit 90 Minuten (+ ggf Verlängerung) – Besprechung n.V.

– keine Hilfsmittel –

VERSTÄNDNIS UND GEDÄCHTNISFRAGEN (30 PUNKTE)

▷ **Aufgabe 1 (Grundlagen I)**

(15 Punkte)

- (a) Gegeben ein Massepunkt, dessen Zustand in der Ortsdarstellung durch eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ beschrieben sei. Was ist die physikalische Bedeutung von $\psi(\vec{x}, t)$? (2P)
- (b) Wie lautet für gegebenes $\psi(\vec{x}, t)$ die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung? Was ist ihre physikalische Bedeutung? (3P)

- (c) Der Massepunkt sei in einem Zustand

$$\psi(\vec{x}, t) \propto \alpha(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \beta(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (1)$$

mit $\vec{k} = (a, a, 0)$ präpariert. Was ist die physikalische Bedeutung der komplexen Koeffizienten α, β (Betrag, Phase)? (4P)

- (d) Gegeben eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, t)$ zweier unterscheidbarer Teilchen. Welche Bedeutung hat der Ausdruck $|\psi(\vec{a}, \vec{b})|^2 d^3x^{(1)} d^3x^{(2)}$? Welche Bedeutung hat der Ausdruck $|\psi(\vec{b}, \vec{a})|^2 d^3x^{(1)} d^3x^{(2)}$? (6P)
Zusatzfrage (für extra 5 Punkte!): Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mindestens ein Teilchen?

▷ **Aufgabe 2 (Grundlagen II)**

(15 Punkte)

- (a) Wie lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation (für Ort und Impuls) und was ist ihre Interpretation? (6P)

- (b) Gegeben ein Spin-1/2 Teilchen das im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1+i}{2}|\downarrow_z\rangle \quad (2)$$

präpariert sei. Mit welcher W'keit wird bei einer s_z -Messung das Teilchen im Zustand $|\downarrow_z\rangle$ (also “ z -antipolarisiert”) gefunden? (3P)

Mit welcher W'keit wird bei einer s_x -Messung das Teilchen im Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (also “ x -polarisiert”) gefunden? (6P)

RECHENAUFGABEN (60 PUNKTE)

▷ **Aufgabe 3 (Kiste mit Delle)** (15 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einer räumlichen Dimension im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } |x| \geq a/2 \\ \varepsilon x^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a > 0$, $\varepsilon > 0$ und εx hinreichend klein, so dass Sie den Term als kleine Störung auffassen dürfen.

- (a) Skizzieren Sie das Potential. Was sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte des ungestörten Problems? (6P)
- (b) Betrachten Sie nun das gestörte Problem. Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten in erster Ordnung. (9P)

▷ **Aufgabe 4 (Ritz Wandpendel)** (15 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ \infty & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad f > 0. \quad (3)$$

Der Hamiltonoperator des Systems liest sich (Ortsdarstellung)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (4)$$

- (a) Bestimmen Sie mittels Variationsverfahren unter Verwendung der Variationsfunktionschar $\{\psi_\kappa(x) = x e^{-\kappa x} | x \in \mathbb{R}_0^+, \kappa \in \mathbb{R}^+\}$ eine obere Grenze für die Grundzustandsenergie des Systems.
Hinweis: Nutzen Sie gegebenenfalls die Formel $\int_0^\infty dx x^n e^{-cx} = \frac{n!}{c^{n+1}}$, $c > 0$, für deren Beweis wir einen Extrapunkt spendieren.
- (b) Geben Sie Gründe warum die Variationsfunktionen für die Problemstellung geeignet erscheinen.
- (c) Das Problem ist exakt diagonalisierbar. Zeigen Sie $E_n = (2n + \frac{3}{2}) \hbar\omega$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Wie vergleicht sich die exakte Grundzustandsenergie mit dem Resultat des Variationsverfahrens?
- (d) Geben Sie ein physikalisches System an, das durch den Hamiltonoperator modelliert wird.

▷ **Aufgabe 5** (15 Punkte)

Für die Potentialstreuung am Potential der “weichen Kugel”

$$V(r) = \begin{cases} V_0(1 - r^2/a^2), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (5)$$

berechne man den differentiellen und totalen Streuquerschnitt in erster Born’scher Näherung.

▷ **Aufgabe 6 (Spindynamik)**

(15 Punkte)

Ein Spin-1/2 Teilchen, anfänglich im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1+i}{2}|\downarrow_z\rangle$ präpariert, wird vor der abschließenden Messung durch ein Magnetfeld geschickt. Der Hamiltonoperator der Spin-Magnetfeld Wechselwirkung lautet

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z \quad , \quad (6)$$

- (a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes von $\vec{\sigma} \equiv (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$.
- (b) Mit welcher W'keit wird der Spin zur Zeit t im Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (also “ x -polarisiert”) gefunden?

THE EXTRA MILE (15 PUNKTE)

▷ **Aufgabe 7 (Drehimpulskopplung)**

(15 Punkte)

Gegeben ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen, von dem bekannt ist, dass es sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 2$ bewegt (d -Orbital). Welche Dimension hat der Hilbertraum des Systems? Welche Werte kann die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl j annehmen? Wie lauten die Basiszustände der gekoppelten Basis (= Gesamtdrehimpuls-Basis)?

ERINNERUNGSHILFEN

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$\hat{J}_{\pm}|JM\rangle = \hbar\sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)}|J, M \pm 1\rangle \quad (8)$$