Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2017
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 1 Ausgabe: 20. April 2018
Abgabe: 30. April 2018

Aufgabe 1.1 – Relativistische Mechanik (8 Punkte)

Die Bewegung einer Punktladung im elektromagnetischen Feld wird in einem gegebenen Koordinatensystem durch eine 'Weltlinie' $\mathbf{r}(t)$ beschrieben. Um die Bewegungsgleichungen zu finden, kann man das Prinzip der kleinsten Wirkung auf folgenden Ausdruck anwenden

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int \mathrm{d}\tau - e \int \mathrm{d}x^\mu A_\mu(x) \\ &= -\int \mathrm{d}t \left\{ mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} + e\left(\phi(x) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(x)\right) \right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ ist. Das Integral $\mathrm{d}x^\mu$ ist als Linienintegral entlang der Weltlinie zu verstehen. Das 4-Potential $A_\mu = (\phi/c, -\mathbf{A})$ wird an den Punkten x der Weltlinie mit den 4-Koordinaten $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ ausgewertet.

(1) Formulieren Sie Argumente, warum S für alle inertialen Beobachter invariant ist. (Deren Koordinaten sich bekanntlich um eine Lorentz-Transformation unterscheiden.)

Lösung. Das Linienelement $\mathrm{d}x^\mu$ und das 4-Vektorpotential A_μ bilden ein Paar von 4-Vektoren (kontravariant und kovariant) derart, dass ihre Kontraktion invariant ist. Der Faktor $1/\gamma(\dot{\mathbf{r}})$ macht aus der Koordinatenzeit $\mathrm{d}t$ eine Größe $\mathrm{d}\tau$ mit einer invarianten Bedeutung: das Zeitelement im (instantan) mitbewegten Bezugssystem ('Eigenzeit'). In diesem ruht das System ,dort wäre etwa $\mathrm{d}x'^\mu = (\mathrm{d}\tau, \mathbf{0})$. Subtiler Punkt: dieses Bezugssystem kann nicht 'global' (für die ganze Bahnkurve) gewählt werden, wenn/weil Beschleunigungen vorliegen. Als Summe von invarianten Zeitschritten ist das Integral $\int \mathrm{d}\tau$ dann trotzdem invariant.

(2) Zeigen Sie, dass aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2}} = -e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A} - e\nabla\phi + e\sum_i \dot{r}_i \nabla A_i \tag{1.2}$$

folgt, wobei $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \partial\mathbf{A}/\partial t + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$.

Lösung. Lagrange-Funktion aus Gl.(1.1) ablesen

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = -mc^2\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - e\phi(x) + e\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(x)$$

und den Impuls berechnen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2}} + e\mathbf{A}(x)$$

Der erste Term enthält die ‘relativistische Massenzunahme’ als Korrektur zum klassischen kinetischen Impuls. Der zweite Term ist typisch für die minimale Kopplung an das Vektorpotential.

Der Rest ist die Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

(3) Zeigen Sie, dass Gl.(1.2) die räumlichen Komponenten der relativistischen Bewegungsgleichung (in 4-Koordinaten) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\mu}{\mathrm{d}\tau} &= eF_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} && (1.3)\\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu && (1.4) \end{aligned}$$

wobei $F_{\mu\nu}$ der Faraday-Tensor ist. Beachten Sie, dass der kovariante Impuls die Komponenten $p_\mu = (E/c, -\mathbf{p})$ hat, wobei sich die Energie

$$E = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2}} + e\phi \qquad (1.5)$$

in der üblichen Form aus der Lagrange-Funktion L ergibt.

Lösung. Zunächst ist Gl.(1.3) unglücklich formuliert, denn hier muss man $\tilde{p}_\mu$ als den ‘kinematischen’ 4-Impuls verstehen

$$\tilde{p}_\mu = m\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = (mc\gamma, -m\dot{\mathbf{r}}\gamma)$$

Und natürlich war die Summation über ν mitgedacht, aber nicht ausgeschrieben.

Wir betrachten die räumlichen Komponenten $\mu = i$ und erhalten auf der linken Seite:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_i}{\mathrm{d}\tau} = -m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\dot{\mathbf{r}}\gamma) = -m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\mathbf{r}}\gamma)$$

Auf der rechten Seite erinnern wir uns an den analogen Vorzeichenwechsel $A_{\mu=i} = -\mathbf{A}_i$ (3-Vektor **fett** notiert). Allerdings ist $\partial_{\mu=i} = \nabla_i$, und wir schreiben die Summe über ν aus

$$eF_{i\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau} \;=\; e\left(\nabla_i\frac{\phi}{c} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}_i\right)\gamma c - e\left(\nabla_i\mathbf{A}_j - \nabla_j\mathbf{A}_i\right)\gamma\dot{\mathbf{r}}_j$$

Als 3-Vektor geschrieben:

$$e\gamma\left(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}\right) - e\gamma\sum_j \dot{\mathbf{r}}_j\nabla A_j + e\gamma(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

So erhalten wir die 3-Vektor-Gleichung (der Lorentz-Faktor γ wurde überall gekürzt):

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{r}}\gamma\right) = -e\left(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}\right) + e\sum_j \dot{\mathbf{r}}_j\nabla A_j - e(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

Der zweite und vierte Term liefern die totale Ableitung $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ in Gl.(1.2), und wir sind fertig. Ergänzend können wir die Gleichung noch auf die bekannte Form der Lorentz-Kraft bringen: die ersten beiden Terme liefern das elektrische Feld:

$$-e\left(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}\right) = e\mathbf{E}$$

und die letzten beiden ein doppeltes Vektorprodukt

$$e\sum_j \dot{r}_j\nabla A_j - e(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A} = e\dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

Aufgabe 1.2 – Lorentz-Transformationen ‘auf den Punkt gebracht’ (6 Punkte)

(1) In der Vorlesung hatten wir die Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ für die Lorentz-Transformation (Schub oder *boost*) wiederholt. Sie enthalten die Parameter γ und $\beta\gamma$ mit $\beta = v/c$ und $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. Fixieren Sie die Vorzeichen der Matrixelemente mit Hilfe von folgender Konvention: die Geschwindigkeit v gebe an, wie sich schnell der Ursprung des Koordinatensystems K' im System K bewegt. Die x- und x'-Achsen seien parallel (im dreidimensionalen Raum). Wenn wir im Ursprung von K' ein ‘Objekt’ platzieren und K das ‘Labor’ nennen, dann ist also offensichtlich, dass die Gleichung $x' = 0$ die ‘Weltlinie’ des Objekts beschreibt. (Wirklich?) Wie lautet also Λ?

(2) Schauen Sie die Lorentz-Transformation für das elektrische Feld nach und zeigen Sie, dass die Coulomb-Lorentz-Kraft

$$e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}) \quad \text{oder} \quad eF_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1.6}$$

proportional zum elektrischen Feld im ‘mitbewegten System’ der Punktladung ist. Sie dürfen sich auf eine oder zwei relevante Komponenten beschränken.

Lösung. Die elektrischen und magnetischen Feldstärken transformieren sich anders als Koordinaten. Der geometrisch-mathematische Grund dafür ist das Verhalten des Faraday-(Feldstärken-)Tensors unter einer Lorentz-Transformation. Nehmen wir die kontravariante Version:

$$\begin{aligned} \text{4-Vektor:} \quad & x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \text{4-Tensor:} \quad & F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \end{aligned}$$

Oder mit Matrix-Vektor-Produkten notiert (über ‘inneren Index’ summieren!):

$$x' = \Lambda x\,, \qquad F' = \Lambda F \Lambda^\mathsf{T}$$

Zum Glück sind (eigentliche) Lorentz-Transformationen (Schübe) symmetrisch: $\Lambda^{\mathsf{T}} = \Lambda$. Aus der Teilaufgabe (1) kennen wir ($c = 1$)

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir annehmen, dass das Teilchen sich in x-Richtung bewegt. Nun losrechnen:

$$\begin{aligned}
\Lambda F &= \begin{pmatrix} -\gamma v E_x & -\gamma E_x & -\gamma(E_y - vB_z) & -\gamma(E_z + vB_y) \\ \gamma E_x & \gamma v E_x & -\gamma(B_z - vE_y) & \gamma(B_y + vE_z) \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda F \Lambda^{\mathsf{T}} &= \begin{pmatrix} -\gamma^2 v E_x + \gamma^2 v E_x & \dots \\ \gamma^2 E_x - \gamma^2 v^2 E_x & \dots \\ \gamma(E_y - vB_z) & \dots \\ \gamma(E_z + vB_y) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ E_x & \dots \\ \gamma(E_y - vB_z) & \dots \\ \gamma(E_z + vB_y) & \dots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die erste Spalte des (kontravarianten!) Feldstärke-Tensors $F'^{\mu\nu}$ im mitbewegten System (K'). Nun die Aufgabe zu Ende denken: in K' hat die Bewegungsgleichung dieselbe Form wie Gl.(1.3) (überall mit Strichen). Indizes rauf und runterziehen, um $F'^{\mu\nu}$ zu verwenden. Und einige Dinge vereinfachen: $\gamma' = 1$ und $\mathrm{d}x'_\nu/\mathrm{d}\tau = (1, -\mathbf{0})$, weil das Teilchen in K' in Ruhe ist. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{p}'_x}{\mathrm{d}t'} &= eF'^{x0} = eE_x \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{p}'_y}{\mathrm{d}t'} &= e\gamma(E_y - vB_z) \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{p}'_z}{\mathrm{d}t'} &= e\gamma(E_z + vB_y)
\end{aligned}$$

OK, durch die Lorentz-Transformation vermischen sich elektrische und magnetische Felder, so dass im mitbewegten System das Magnetfeld auftritt, obwohl dort das Teilchen ruht. Wegen des Faktors γ, der nicht bei allen Komponenten auftritt, ist dies allerdings *nicht* wirklich die Lorentz-Kraft, die wir aus dem Laborsystem kennen. Ein Grund dafür kann an der nicht-trivialen Transformation der 'Kraft' liegen.

Aufgabe 1.3 – Pionen und Kernkräfte (6 Punkte)

(1) In der Vorlesung haben wir die Klein–Gordon-Gleichung für Pionen (π^0, $\pi^{\pm}$) kennen gelernt. Schauen Sie nach, wie groß die Massen m dieser drei Pionen sind. Wie groß ist die 'Reichweite' $1/\mu = \hbar/(mc)$ des entsprechenden Klein–Gordon-Felds?

(2) Auch Atomkerne haben angeregte Zustände, die mit einem ähnlichen Formalismus beschrieben werden wie die elektronischen Anregungen von Atomen und Molekülen. Schauen Sie nach, in welchem Bereich die typischen

Anregungsenergien ΔE zum Beispiel des Kerns ^{6}Li liegen. Einige von diesen angeregten Zuständen können durch Emission eines γ-Quants, also eines Photons, in den Grundzustand übergehen. Wie groß ist die Wellenlänge dieses Photons? Vergleichen Sie mit dem typischen Durchmesser des Kerns. Ist eine 'Näherung großer Wellenlängen' (auch als Dipol-Näherung bekannt) sinnvoll?

Lösung. Zur Größe von Atomkernen gibt es erstaunlich wenig Information im Netz, obwohl es Datenbanken gibt, die mit Unmengen von angeregten Zuständen, Streuquerschnitten usw. enthalten. Auf der nupex Seite gibt es eine einfache Formel für den Radius $R = r_0 A^{1/3}$ mit der Massenzahl A und $r_0 \approx 1.3\,\mathrm{fm}$.

Man lernt aus den Zahlen, dass für γ-Zerfälle im MeV-Bereich die elektromagnetische Wellenlänge ($\sim 100\,\mathrm{fm}$) in der Tat viel größer als der Kern selbst ist.