Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2017

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 2 Ausgabe: 15. Mai 2017

Abgabe: 24. Mai 2017

Hinweis. In diesem Blatt wird $c = \hbar = 1$ verwendet.

Aufgabe 2.1 – Weyl, Dirac, Clifford, Schall und Rauch (7 Punkte)

In der Vorlesung und in den Lehrbüchern zur relativistischen Quantenmechanik finden Sie folgende 'Standard-Darstellung' der Dirac-Gleichung

$$\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu \Psi = m\Psi\,, \qquad D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu = (\partial_t + \mathrm{i}e\phi, \nabla_k - \mathrm{i}eA^k) \tag{2.1}$$

wobei die vier Objekte $\gamma^0, \gamma^1, \ldots \gamma^3$ folgende 4×4-Matrizen sind (die Dirac-Matrizen)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Wir benutzen eine Block-Schreibweise mit einer 2×2-Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ und den Pauli-Matrizen $\sigma_1, \ldots \sigma_3$. Leere Blöcke enthalten nur Nullen.

(1) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen folgende Relationen erfüllen:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

wobei $g^{\mu\nu}$ der metrische Tensor der speziellen Relativitätstheorie ist. Auf der rechten Seite dürfen Sie eine 4×4-Einheitsmatrix $\mathbb{1}_4$ ergänzen. (Mit dieser Gleichung spannen die Dirac-Matrizen eine 'Clifford-Algebra' auf.)

(2) Zeigen Sie, dass eine unitäre Transformation $\gamma^\mu \mapsto U^\dagger\gamma^\mu U$ die Clifford-Relation invariant lässt.

Die sogenannte 'chirale Darstellung' der γ-Matrizen lautet (die Notation τ^μ dient nur der Unterscheidung von Gl.(2.2) und ist nicht Standard)

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{pmatrix}, \quad \tau^k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(3) Zeigen Sie, dass mit dieser Wahl die Dirac-Gleichung (2.1) für masselose Teilchen in zwei Blöcke zerfällt, ein 'oberer 2-Spinor' und ein 'unterer 2-Spinor'. Zeigen Sie, dass diese beiden Spinoren jeweils eine Weyl-Gleichung erfüllen,

die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben. Die beiden Spinoren heißen 'rechtshändig' und 'linkshändig' und spielen eine zentrale Rolle in der (elektro)schwachen Wechselwirkung, die nur an einen der beiden koppelt. In der Dirac-Gleichung für Elektronen werden links- und rechtshändige Spinoren durch den Masseterm untereinander gekoppelt.

(4) Zeigen Sie, dass die τ^μ ebenfalls die Clifford-Relation erfüllen und finden Sie eine unitäre Matrix mit $\tau^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U$.

Aufgabe 2.2 – Von Dirac zu Klein-Gordon (5 Punkte)

Wenden Sie den 'Dirac-Operator' $\gamma^\mu D_\mu$ aus Gl.(2.2) zweimal auf einen Spinor Ψ an und zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung mit einem Korrekturterm ergibt

$$(\gamma^\mu D_\mu)(\gamma^\nu D_\nu)\Psi = (D^\mu D_\mu + eS^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\Psi = -m^2\Psi \tag{2.5}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right], \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.6}$$

Aufgabe 2.3 – Relativistischer Wasserstoff (8 Punkte)

(1) Begründen Sie, dass die folgende Gleichung eine relativistisch konsistente Beschreibung des Wasserstoffatoms liefert, solange man davon ausgeht, dass das Elektron Spin 0 hat:

$$\left\{-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 - \left(E - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right\}\Phi = 0 \tag{2.7}$$

wobei $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ die Feinstrukturkonstante ist. (2) Diese Gleichung kann man genauso wie die Schrödingergleichung lösen, und man findet folgende Energie-Eigenwerte

$$\text{KG:} \quad E_{nl} = \frac{m}{\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{(n-\delta_l)^2}\right)^{1/2}}, \qquad \delta_l = l + \tfrac{1}{2} - \left((l+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

($n = 0, 1, \ldots$, $l = 0, \ldots n-1$.) Haben Elektronen allerdings einen Spin 1/2, dann muss man die Dirac-Gleichung lösen und kommt auf das Ergebnis:

$$\text{D:} \quad E_{nj} = \frac{m}{\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{(n-\delta_j)^2}\right)^{1/2}}, \qquad \delta_j = j + \tfrac{1}{2} - \left((j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

($n = 0, 1, \ldots$, $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots n - \frac{1}{2}$.) Vergleichen Sie beide Ergebnisse mit den experimentell bestimmten Werten. (Eine zuverlässige Quelle ist das Basic Atomic Spectroscopy Data Handbook des NIST.)

Aufgabe 2.4 – Drehungen und unitäre Abbildungen* (10* Bonuspunkte)

Seien σ_i die bekannten Pauli-Matrizen. Betrachten Sie folgende lineare Abbildung vom Vektorraum $\mathbb{R}^3$ in einen Unterraum $\mathcal{A}$ der komplexen 2×2-Matrizen

$$\Upsilon : \mathbf{r} \mapsto S = \sum_{i=1}^{3} r_i \sigma_i \tag{2.10}$$

(i) Was können Sie über diesen Unterraum sagen?

(ii) Überlegen Sie, dass auf diesem Unterraum wie folgt ein nicht-entartetes Skalarprodukt definiert wird:

$$(S, T) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(S^\dagger T) \tag{2.11}$$

Und: bezüglich der Norm, die von diesem Skalarprodukt erzeugt wird, sind die Pauli-Matrizen auf 1 normiert. Finden Sie mit diesem Hinweis die Umkehrabbildung $\Upsilon^{-1} : S \mapsto \mathbf{r}$.

(iii) Sei U eine unitäre Matrix (zur Erinnerung: $U^\dagger = U^{-1}$). Überlegen Sie, dass die Konjugation mit U den Unterraum $\mathcal{A}$ invariant lässt. (Das heißt: ...?) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt in $\mathcal{A}$ unter Konjugation erhalten bleibt:

$$(U^\dagger S U, U^\dagger T U) = (S, T) \tag{2.12}$$

(iv) Folgern Sie, dass die Abbildungskette

$$\mathbf{r} \mapsto \Upsilon(\mathbf{r}) \mapsto U^\dagger \Upsilon(\mathbf{r}) U \mapsto \mathbf{r}' = \Upsilon^{-1}(U^\dagger \Upsilon(\mathbf{r}) U) \tag{2.13}$$

eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert, die Längen und Winkel zwischen Vektoren erhält. Es muss also eine Drehung sein. Beobachten Sie, dass die Matrizen U und $-U$ dieselbe Drehung erzeugen.

(v) Der Hamilton-Operator $H = \sum_i h_i \sigma_i$ ist ein Element von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-\mathrm{i}Ht/\hbar)$ im $\mathbb{R}^3$ einer Drehung um die Achse $\mathbf{h}$ mit einem Drehwinkel proportional zu t entspricht.