Einführung in die Quantenoptik II

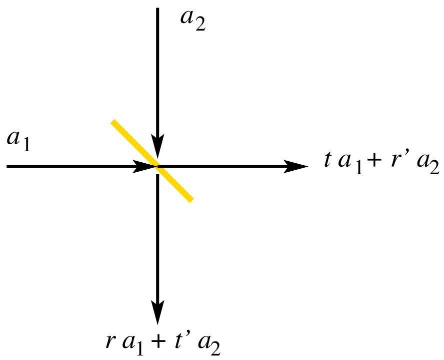
Sommersemester 2018

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 3

Ausgabe: 31. Mai 2018
Abgabe: 08. Juni 2018

Aufgabe 3.1 – Homodyn-Messungen (8 Punkte)



In der Vorlesung haben wir kurz über einen Strahlteiler gesproche, der bei Homodyn-Messungen (siehe Bild links) verwendet wird. Die Formeln in dem Bild geben an, wie die Operatoren der einfallenden und ausgehenden Strahlen (Moden) zusammenhängen: man darf einfach die Reflexions- und Transmissions-Amplituden der klassischen Elektrodynamik verwenden.

(i) In der Homodyn-Messung nehmen wir an, dass der 'von oben kommende' Strahl 'hell' und 'kohärent' ist. Der einfachste Weg, das in der Theorie auszudrücken, ist den Operator a_2 durch eine komplexe Zahl α_2 zu ersetzen. Deren Phase sei θ und für die Amplitude nehmen wir $|\alpha_2| \gg 1$ an. Sei $\hat{n}$ der Photonenzahl-Operator für den Strahl, der nach rechts den Strahlteiler verlässt. Geben Sie eine Formel für $\hat{n}$ an. Vereinfachen Sie unter der oben getroffenen Annahme.

(ii) Zeigen Sie, dass in dem Operator $\hat{n}$ eine Quadratur

$$X(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} a_1 + e^{-i\varphi} a_1^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{3.1}$$

vorkommt. Möglicherweise müssen Sie die Amplituden r' und t geeignet wählen. Überlegen Sie sich ein Protokoll, mit dem Sie den Erwartungswert $\langle X(\varphi) \rangle$ messen können. In der Praxis nimmt man auch gerne die Differenz der Intensitäten 'nach rechts' und 'nach unten', aber es wäre wohl zuviel verlangt, das auszurechnen – es sei denn, sie wählen einen '50:50' Strahlteiler.

(iii) Berechnen Sie die Varianz Δn^2 der Photonenzahl: sie ist proportional zur Varianz $\Delta X(\theta)^2$ der Quadratur. Wenn diese vom Phasenwinkel θ abhängt, sagt man, der einfallende Strahl a_1 ist gequetscht. Zeigen Sie, dass ein Anzahl-

Zustand ($a_1^\dagger a_1|\Psi_1\rangle = n|\Psi_1\rangle$) und ein kohärenter Zustand ($a_1|\Psi_1\rangle = \alpha_1|\Psi_1\rangle$) nicht gequetscht sind.

Aufgabe 3.2 – Stimulierte und spontane Emission à la Einstein (6 Punkte)

A. Einstein hat in seiner berühmten Arbeit von 1917 'Zur Quantentheorie der Strahlung' [*Phys. Zeitschr.* **18** (1917) 121, online bei ing-buero-ebel.de] die A- und B-Koeffizienten eingeführt. Dies sind Raten, die in folgendes System von Differentialgleichungen eingehen:

$$\dot{N}_e = BIN_g - (A + BI)N_e \tag{3.2}$$

$$\dot{N}_g = (A + BI)N_e - BIN_g \tag{3.3}$$

$$\dot{I} = BN_e I + AN_e - BN_g I \tag{3.4}$$

(i) Die Bedeutung dieser Größen ist: N_e (N_g) = Anzahl von Atomen im Zustand $|e\rangle$ (im Zustand $|g\rangle$); I = Anzahl von Photonen. Nehmen Sie, dass dies ein einfaches Modell eines Lasers ist und beschreiben Sie in Worten die physikalischen Prozesse, die die Koeffizienten A und B beschreiben.

(ii) Nehmen Sie an, dass die Besetzungen N_e und N_g konstant sind. Unter welchen Bedingungen wird die Zahl der Photonen anwachsen? Wie ändert sich die Antwort, wenn Sie der Differentialgleichung für I einen Term $-\kappa I$ hinzufügen? So finden Sie die 'Laserschwelle'.

(iii) Leider kann die Laserschwelle niemals erreicht werden, wenn die Atome ein 'geschlossenes Zwei-Niveau-System' bilden. Überprüfen Sie diese Aussage, indem Sie für einen festen Wert von I die stationäre Lösung für N_e und N_g berechnen.

(iv) Ein einfaches Modell, in dem das Lasen funktioniert, ergänzt die Gleichung für $\dot{N}_e$ um einen Term R_e und die für $\dot{N}_g$ um einen Term $-\Gamma N_g$. Wie ändert sich die stationäre Lösung von (iii)?

Aufgabe 3.3 – Mastergleichungen für den Laser (5 Punkte + 10 Bonuspunkte)

In der Vorlesung werden wir einen Typ von Bewegungs-Gleichungen kennen lernen, der über die Schrödinger-Gleichung für abgeschlossene Systeme hinausgeht. Ein Beispiel für den Laser wäre folgende Gleichung (in 'Lindblad-Form')

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, \rho] + \kappa\left(a\rho a^\dagger - \left\{a^\dagger a, \rho\right\}\right) \\ &\quad + \left(L\rho L^\dagger - \left\{L^\dagger L, \rho\right\}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei das symmetrische Produkt zwischen zwei Operatoren wie folgt definiert ist

$$\{A,\, B\} = \tfrac{1}{2}\,(AB + BA) \tag{3.6}$$

(Achtung: manchmal wird dies ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ definiert! Der muss dann in Gl.(3.5) reingeschrieben werden.)

(1) Zeigen Sie, dass Gl.(3.5) die Spur von ρ erhält. Die Lindblad-Form hat noch einige andere Eigenschaften, die dazu führen, dass ρ zu allen Zeiten als Dichteoperator interpretierbar ist.

(2) Eine einfache Wahl für ein Laser-Modell benutzt den Operator $L = \sqrt{G}a^\dagger$. Zeigen Sie, dass κ und G als Raten für den Verlust und den Gewinn von Photonen gelesen werden können, indem Sie aus (3.5) eine Differentialgleichung für den Erwartungswert der Photonenzahl ausrechnen:

$$\langle \hat{n} \rangle = \mathrm{tr}(a^\dagger a \rho)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{n} \rangle = \mathrm{tr}\Big(a^\dagger a \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\Big) \tag{3.7}$$

Wenn Sie sich wundern, dass diese Gleichung keine stationäre Lösung oberhalb der Laserschwelle (für $G > \kappa$) hat – genau das würde ich auch erwarten.

Lösung. Wenn man aus einer Lindblad-Mastergleichung die Entwicklung einer Observablen A erhalten will, ist folgende Formel nützlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left[A(L\rho L^\dagger - \{L^\dagger L, \rho\})\right] &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[AL\rho L^\dagger - AL^\dagger L\rho\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[AL\rho L^\dagger - A\rho L^\dagger L\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[L^\dagger AL\rho - AL^\dagger L\rho\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[L^\dagger AL\rho - L^\dagger LA\rho\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left([L^\dagger, A]L\rho\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(L^\dagger[A, L]\rho\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle [L^\dagger, A]L\rangle + \frac{1}{2}\langle L^\dagger[A, L]\rangle
\end{aligned}$$

Es reicht also aus, den Kommutator $[A, L]$ zu berechnen. Dazu konjugiert ist $[L^\dagger, A]$. Für die Photonenzahl $A = a^\dagger a$ und den 'Verstärker' $L = \sqrt{G}a^\dagger$:

$$[A, L] = \sqrt{G}[a^\dagger a, a^\dagger] = \sqrt{G}a^\dagger$$

Damit wird $\frac{1}{2}\langle [L^\dagger, A]L\rangle + \frac{1}{2}\langle L^\dagger[A, L]\rangle = G\langle aa^\dagger\rangle = G(\langle a^\dagger a\rangle + 1)$

(3*) An keiner Stelle liefert die Mastergleichung allerdings einen Hinweis darauf, dass der Laser einen Erwartungswert $\langle \hat{a} \rangle \neq 0$ liefert, obwohl wir das doch die ganze Zeit als typisch für einen Laser verwendet haben. Untersuchen Sie diese Frage, indem Sie eine Gleichung für die 'Kohärenz' $\rho_{01} = \langle 0|\rho|1\rangle$ finden (so nennt man dieses nicht-diagonale Matrixelement). [*4 Bonuspunkte]

(4) Ein verbessertes Modell berücksichtigt die Tatsache, dass ein typisches aktives Medium mit steigender Intensität für das Laserlicht transparent wird:

Grund- und angeregter Zustand sind gleich stark besetzt und stimulierte Emission und Absorption halten sich die Waage. Ein einfache Möglichkeit, dies in eine Lindblad-Form zu gießen, ist der 'nichtlineare Verstärkungs-Operator'

$$L = \sqrt{G} a^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \hat{n}}} \tag{3.8}$$

der die Wahl von Punkt (2) ersetzt. Versuchen Sie, diese Wahl zu begründen und den Parameter β physikalisch zu interpretieren.

(5*) Zeigen Sie, dass die Mastergleichung dann folgenden Satz von Ratengleichungen für die 'Photonenstatistik' $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$ ($n = 0, 1, \ldots$) liefert [*6 Bonuspunkte]

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = \kappa \left((n+1) p_{n+1} - n p_n \right) + G \left(\frac{n p_{n-1}}{1 + \beta(n-1)} - \frac{(n+1) p_n}{1 + \beta n} \right) \tag{3.9}$$

In der Vorlesung werden wir die stationäre Lösung dieser Gleichung diskutieren.