Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2018

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4 Ausgabe: 12. Juni 2018

Abgabe: 22. Juni 2018

Aufgabe 4.1 – Scully-Lamb Laser-Modell (10 Punkte)

Im letzten Übungsblatt (und in der Vorlesung) haben wir das Lasermodell nach Scully & Lamb kennen gelernt. Die zeitliche Entwicklung der Photonen-Statistik p_n $(n = 0, 1 \ldots)$ ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = \kappa \left((n+1) p_{n+1} - n p_n \right) + G \left(\frac{n p_{n-1}}{1 + \beta(n-1)} - \frac{(n+1) p_n}{1 + \beta n} \right) \tag{4.1}$$

wobei κ die Verlustrate, G die Kleinsignal-Verstärkung und β ein Maß für Sättigung ist.

(1) Für die stationäre Verteilung findet man folgende Formel (die Sie nicht beweisen müssen)

$$p_n^{(ss)} = Z \left(\frac{G}{\kappa} \right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \beta(k-1)}, \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{4.2}$$

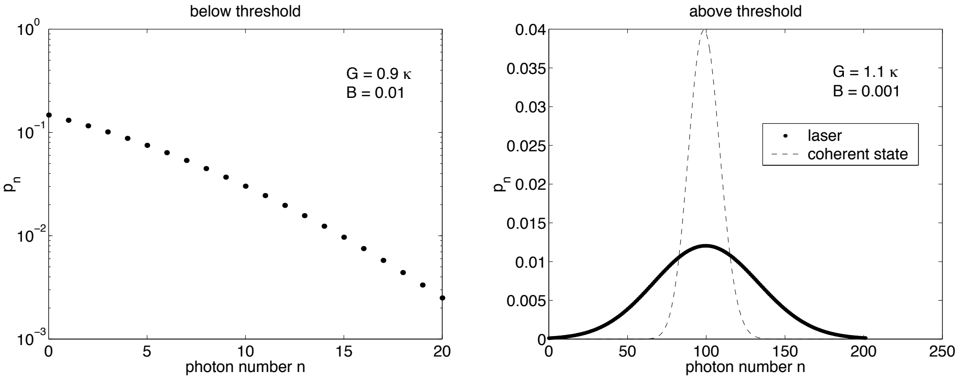
wobei Z ein Normierungsfaktor ist und $p_0^{(ss)} = Z$. Zeigen Sie, dass für $G > \kappa$ die Photonenzahl n_* (mit $\beta n_* \approx G/\kappa - 1$) ungefähr mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt. Skizzieren Sie n_* als Funktion von G.

(2) Schreiben Sie ein Computer-Programm, das die Verteilung $p^{(ss)}(n)$ berechnet. Um Rundungsfehler bei großen Zahlen für n_* zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Verteilung mit einem beliebigen Wert für $p(n_*)$ zu initialisieren. Für $n > n_*$ und $n < n_*$ können Sie dann Rekursionsformeln verwenden, z.B.

$$\kappa p_{n+1} = \frac{G}{1 + \beta n} p_n \tag{4.3}$$

Formulieren Sie eine plausible Abbruchbedingung für $n \gg n_*$ und normieren Sie dann die Verteilung. Dieses Verfahren ist nicht nötig, wenn n_* relativ klein ist: dann können Sie die Rekursion bei $n = 0$ starten.

(3) Die Photonenstatistik könnte typischerweise so aussehen



Links unterhalb der Schwelle $G < \kappa$, rechts oberhalb davon. Mit B ist β gemeint. Erklären Sie, was man mit dem Satz meint: "Im rechten Bild ist die Photonenzahl super-Poisson-verteilt."

(4) Benutzen Sie Ihr Programm, um die Photonenstatistik auf folgende charakteristische Größen zu testen (Sie dürfen die Teilaufgaben gerne unter sich aufteilen): (i) mittlere Photonenzahl $\bar{n}$ als Funktion von G in der Nähe der Schwelle. (ii) Das Verhältnis von Varianz zu $\bar{n}$, auch genannt 'Mandel-Parameter' $Q = \Delta n^2/\bar{n}$. Der Wert $Q = 1$ ist typisch für die Poisson-Verteilung. (iii) Die Kumulanten 3. und 4. Ordnung ('skewness', 'Kurtosis')

$$K_3 = \frac{\langle (n - \bar{n})^3 \rangle}{\Delta n^3}, \qquad K_4 = \frac{\langle (n - \bar{n})^4 \rangle}{\Delta n^4} \tag{4.4}$$

$K_3 \neq 0$ ist ein Hinweis darauf, dass die Verteilung asymmetrisch ist. $K_4 > 3$ gilt für Verteilungen, die (bei gleicher Standardabweichung) 'breitere Flanken' als eine Gauß-Verteilung haben. Vorsicht mit der Konvergenz der Mittelung über n.

Aufgabe 4.2 – Lorenz model (10 Punkte)

In Chapter 18.8 of Mandel & Wolf, the Lorenz model is introduced as a simplified version of the dynamics of a laser coupled to its active medium. (i) Check from the Bloch equations discussed in the lecture that for the polarization P of the medium (complex) and its inversion N (real), the following equations are reasonable

$$\begin{aligned} \partial_t P &= (\mathrm{i}\Delta - \Gamma)P - \mathrm{i}gN\mathcal{E} && (4.5) \\ \partial_t N &= -\gamma(N - N_s) + g\,\mathrm{Im}[P^*\mathcal{E}] && (4.6) \\ \partial_t \mathcal{E} &= -\kappa\mathcal{E} + \mathrm{i}G_0 P && (4.7) \end{aligned}$$

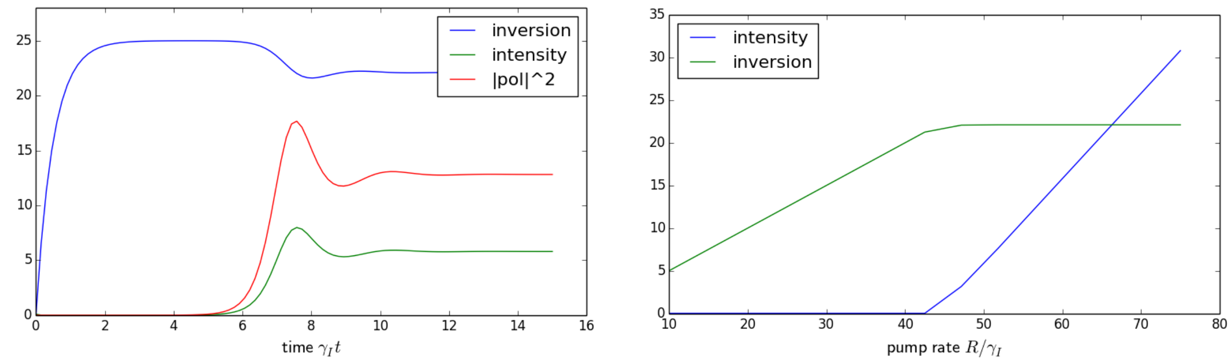


Figure 4.1: (left) Transient laser observables after onset, based on a three-component Bloch-Lorenz model. Intensity: $|\mathcal{E}|^2$, |pol|^2: $|P|^2$. (right) Stationary observables as a function of the pump rate.

where in the last line, we also added the dynamics of the (complex) laser amplitude $\mathcal{E}$ (slowly varying, omitting the carrier $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t}$).

(ii) Show that by using suitable units for P, N, $\mathcal{E}$ and the phase transformation $P(t) = P'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t}$, the equations can be brought into the following form (Python code, writing F instead of $\mathcal{E}$)

```
Pdot = -(gammaP + 1j*delta)*P - 1j*gammaI*(F*inv);
invDot = -2*gammaI*inv + pumpRate + gammaI*imag(conj(F)*P);
Fdot = -(kappa + 1j*deltaC)*F + 1j*kappa*P;
```

(iii) On the lecture web site, you can download a Python script that solves the Bloch-Lorenz equations numerically. Examples of output look like Fig.4.1. Write a few lines about the interpretation of the left and right plot.

(iv) Play with the parameters of the Python script and study the influence of the initial data on the dynamics. Try to find a formula for the pump threshold. Make a close-up scan near the laser threshold and check the change in the time scale to reach the stationary state.