Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2018

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 5 Ausgabe: 25. Juni 2018

Abgabe: 05. Juli 2018

Aufgabe 5.1 – Phasendiffusion (12 Punkte)

Der Prozess "Phasendiffusion" liefert ein einfaches Beispiel für eine Fokker-Planck-Gleichung (Entwicklung einer Verteilung im Phasenraum). Wir betrachten ein oszillierendes Signal, dessen Phase $\phi = \phi(t)$ langsam und zufällig hin- und her-driftet.

(1) Schreiben Sie einen Satz über die Bedeutung der Verteilungsfunktion $P(\phi, t)$. Wählen Sie ein Beispiel für die Anfangsverteilung $P(\phi, 0)$, skizzieren Sie $P(\phi, t)$ und begründen Sie das Verhalten für große Zeiten

$$\lim_{t\to\infty} P(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \tag{5.1}$$

(2) Die Zufallsbewegung der Phase kann durch eine Drift-Diffusions-Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \omega_L \frac{\partial P}{\partial \phi} = D\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \tag{5.2}$$

Überprüfen Sie, dass ω_L die Dimension einer Frequenz und D die eines Diffusionskoeffizienten haben. (Vorsicht: welche Größe diffundiert?) Transformieren Sie in ein "mit-bewegtes Bezugssystem" (keine Garantie für Vorzeichen)

$$P(\phi, t) = \tilde{P}(\varphi, t)\,, \quad \phi = \varphi - \omega_L t \tag{5.3}$$

und zeigen Sie, dass die Lösung von Gl.(5.2) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\tilde{P}(\varphi, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi - n^2 Dt} \tag{5.4}$$

Wie würden Sie die Koeffizienten w_n bestimmen?

Lösung. Bei den partiellen Ableitungen müssen Sie aufpassen, weil die Funktionen $P(\phi, t)$ und $\tilde{P}(\varphi, t)$ punktweise gleich sind:

$$\partial_t P(\phi, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{P}(\phi - \omega_L t, t) = \partial_t \tilde{P}(\phi - \omega_L t, t) - \omega_L \partial_\varphi \tilde{P}(\phi - \omega_L t, t)$$

Im letzten Ausdruck sind wieder partielle Ableitungen nach dem zweiten und ersten Argument gemeint.

Die Koeffizienten w_n können Sie z.B. aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$w_n = \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \tilde{P}(\varphi, 0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}$$

Indem Sie hier $n = -1$ setzen, können Sie in dem Integral den Mittelwert einer phasenabhängigen Größe zum Zeitpunkt 0 ablesen. Mit der üblichen Notation

$$w_{-1} = \frac{1}{2\pi} \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(0)} \rangle$$

(3) Schließen Sie daraus, dass für ein Signal mit konstanter Amplitude folgende Mittelwerte gelten

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} \rangle &= \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(0)} \rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t} \mathrm{e}^{-Dt} && (5.5) \\ \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(t)-\phi(0)]} \rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t} \mathrm{e}^{-Dt}, \qquad t \ge 0 && (5.6) \end{aligned}$$

Hinweis. Untersuchen Sie zuerst in Gl.(5.4) die Verteilung der Phase zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung. Erste Zeile: den Mittelwert als Integral über die Verteilungsfunktion ausschreiben:

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} \rangle = \int \mathrm{d}\phi\, P(\phi, t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \sum_n \int \mathrm{d}\phi\, w_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi+\omega_L t) - n^2 Dt}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

Das ϕ-Integral liefert nur einen Wert, falls $n = -1$ ist:

$$= 2\pi w_{-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t - Dt}$$

und eben haben wir gesehen, dass $w_{-1} \sim \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(0)} \rangle$.

Die zweite Zeile ist etwas schwieriger: zunächst einmal als Mittelwert über zwei Messungen zu den Zeitpunkten 0 und t schreiben:

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(t)-\phi(0)]} \rangle = \int \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_0\, P_2(\phi_1, t, \phi_0, 0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1 - \phi_0)}$$

Diese Verteilung (Index 2) beschreibt das Eintreffen von zwei Ereignissen, was wir noch nicht modelliert haben. Zentrale Idee: wir können sie als Produkt einer bedingten Wahrscheinlichkeit schreiben:

$$P_2(\phi_1, t, \phi_0, 0) = W(\phi_1, t|\phi_0, 0) P(\phi_0, 0)$$

$W(\phi_1, t|\phi_0, 0)$ beschreibt also, dass die Phase zum Zeitpunkt t den Wert ϕ_1 hat, unter der Bedingung, dass zu Beginn ($t = 0$) der Anfangswert ϕ_0 vorlag. In diesem Modell nehmen wir an, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit *dieselbe* Fokker-Planck-Gleichung (5.2) erfüllt.[1] Allerdings ist die Anfangsbedingung eine andere:

$$\lim_{t\to 0} W(\phi_1, t|\phi_0, 0) = \delta(\phi_1 - \phi_0)$$

[1] Dies ist eine im klassischen Kontext plausible Annahme. In der Quantenmechanik kann man die Frage stellen, ob die Messung bei $t = 0$ das System stört und die Dynamik sich unterscheidet. In der Praxis taucht ein Problem dann auf, wenn die Messung/Störung zu einem transienten Verhalten führt, das nicht in der ursprünglichen Fokker-Planck-Gleichung “eingebaut” ist, weil z.B. immer von einem Zustand in der Nähe des Gleichgewichts ausgegangen wird.

In der Darstellung als Fourier-Summe mit Entwicklungskoeffizienten q_n

$$W(\phi_1, t|\phi_0, 0) = \sum_n q_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi_1 + \omega_L t) - n^2 D t}$$

bekommen wir also aus Gl.(5.1):

$$q_n = \int \frac{\mathrm{d}\phi_1}{2\pi} \delta(\phi_1 - \phi_0) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi_1} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi_0}}{2\pi}$$

Der Rest geht ähnlich wie oben: die Integrale über ϕ_1 und ϕ_0 greifen aus den Summen über n jeweils einen Term heraus.

(iv) Ergebnisse wie (5.6) werden oft mit Langevin-Gleichungen abgeleitet, z.B.

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\omega_L + \xi(t) \tag{5.7}$$

Hier ist $\xi(t)$ ein "weißes Frequenz-Rauschen". Es handelt sich um einen reellen "stochastischen Prozess", der durch den Mittelwert in Gl.(5.9) definiert wird. Dazu betrachten Sie ein "gefiltertes Rauschen"

$$(f, \xi) := \int \mathrm{d}t \, f(t) \xi(t) \tag{5.8}$$

wo der "Filter" $f(t)$ eine glatte, integrierbare Funktion ist. Die Größe (f, ξ) ist eine Zufallsvariable, dessen charakteristische Funktion gauss-förmig ist:

$$\langle \exp \mathrm{i}(f, \xi) \rangle = \exp \left[-\frac{D}{2} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} |\tilde{f}(\omega)|^2 \right] \tag{5.9}$$

mit der Fourier-Transformierten $\tilde{f}$ von f. Entwickeln Sie beide Seiten in der ersten Ordnung in f, um $\langle \xi(t) \rangle = 0$ zu zeigen.

Hinweis. Falls das Frequenzrauschen farbig wäre, müssten wir den Faktor D durch die spektrale Dichte des Rauschens $S_\xi(\omega)$ ersetzen und unter das Integral ziehen.

Lösung. Taylor-Reihen für die e-Funktionen in Gl.(5.9) hinschreiben. Die entscheidende Idee ist, dass auf der rechten und linken Seite die Terme nach den *gleichen Potenzen* von f sortiert werden müssen. In nullter Ordnung steht $1 = 1$ da. Die nächste Ordnung auf der rechten Seite ist quadratisch in f, deswegen findet man für die erste Ordnung der linken Seite:

$$0 = \langle (f, \xi) \rangle = \int \mathrm{d}t' \, f(t') \langle \xi(t') \rangle$$

Nun nehmen wir eine Filterfunktion, die um einen Zeitpunkt $t' = t$ konzentriert ist. Ein $\delta(t' - t)$ dürfen wir nur im Grenzwert nehmen, weil diese Funktion nicht "glatt genug" ist. So erhält man $\langle \xi(t) \rangle = 0$ mit einer geeigneten vorsichtigen Formulierung: "fast überall" oder "fast sicher".

In der zweiten Ordnung finden wir ein Integral über die Korrelationsfunktion des Rauschens

$$-\frac{1}{2} \langle (f, \xi)^2 \rangle = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}t_t \mathrm{d}t_2 f(t_1) f(t_2) \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle$$

Für die Korrelationsfunktion von weißem Rauschen findet man in den Büchern die (symbolische) Formel

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = D\delta(t_1 - t_2) \tag{5.10}$$

die natürlich für $t_1 = t_2$ nicht sinnvoll ist. Unter dem Integral ist das Ergebnis aber kompatibel mit der rechten Seite

$$-\frac{D}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|\tilde{f}(\omega)|^2 = -\frac{D}{2}\int \mathrm{d}t\, f(t)^2$$

wobei Parseval–Plancherel verwendet wurde.

(v) Lösen Sie Gl.(5.7) und berechnen Sie den Mittelwert $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(t)-\phi(0)]}\rangle$, indem Sie eine geeignete Filterfunktion $f(t)$ identifizieren und Gl.(5.9) verwenden.

Hinweis. Parseval–Plancherel:

$$\int \mathrm{d}t\, f(t)^2 = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|\tilde{f}(\omega)|^2 \,.$$

Aufgabe 5.2 – Korrelationen (8 Punkte)

In der Vorlesung haben wir das Wiener–Chintschin-Theorem gesehen,

$$S_a(\omega) = \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle \,, \tag{5.11}$$

hier in der Form für ein normal geordnetes “Quantensignal” $a(t)$. In dieser Aufgabe spielen wir mit diesen Begriffen an Hand von einfachen Beispielen.

(1) Stellen Sie sich vor, $a(t)$ sei die Amplitude einer sich frei entwickelnden Feldmode, ohne Dämpfung. Schreiben Sie die Lösung für den Heisenberg-Operator $a(t)$ für einen gegebenen “Anfangswert” $a = a(0)$. Zeigen Sie, dass die Autokorrelationsfunktion $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ proportional zur mittleren Photonenzahl $\bar{n}$ (für $t = 0$) ist und dass das Spektrum $S_a(\omega)$ strikt monochromatisch ist.

(2) Mit einem Werkzeug wie der Master-Gleichung können Sie die Entwicklung eines Quantensystems “vorwärts in der Zeit” berechnen – denn in der Tat bewirken Verluste, dass “vorwärts” und “rückwärts” nicht mehr äquivalent sind. Nehmen Sie an, dass Sie die Korrelation $C_a(\tau) = \langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ für $\tau \geq 0$ kennen und dass diese Korrelationsfunktion “statistisch stationär” ist. (D.h.: sie hängt nicht vom Wert von t ab.) Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$C_a(-\tau) = [C_a(\tau)]^* \,, \tag{5.12}$$

so dass wir haben

$$S_a(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}C_a(\tau) \,. \tag{5.13}$$

(3) Ein typisches Ergebnis einer Master-Gleichung ist eine Korrelationsfunktion, die exponentiell zerfällt:

$$\tau \geq 0: \quad C_a(\tau) = \bar{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c \tau - \kappa \tau}\,. \tag{5.14}$$

Schreiben Sie zwei Sätze mit der Bedeutung der Parameter ω_c und κ und berechnen Sie das Spektrum $S_a(\omega)$. Es enthält ein Maximum (eine "Spektrallinie"): an welcher Position (Frequenz), mit welcher (Linien-)Breite und welcher Form (Linienprofil)?