Theoretische Physik III (Lehramt)
- SoSe 2018 -

Übungsblatt 04

Ausgabe 29.05.18 – Abgabe 11.06.18 – Besprechung 12.06.2018

Die folgenden Aufgaben sind mehr oder weniger – es kommt auf die Schule/Klasse/Umgebung an – Schulstoff. Sie sind gut beraten, sich mit ihnen intensiv auseinanderzusetzen.

▷ Aufgabe 1 (Wurf und Krümmung)

Der schiefe Wurf, daran sei erinnert, läßt sich in der Wurfebene (hier: XZ-Ebene, mit X die Horizontale, und Z die Höhe) beschreiben

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t\,, \qquad z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

worin x_0, z_0 Koordinaten des Abwurfpunktes, v_{0x}, v_{0y} horizontale und vertikale Komponente der Abwurfgeschwindigkeit, und $g \approx 10\text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

Wir betrachten die Wurfbewegung für zwei Körper, Ball und Geschoss. Die horizontalen Komponenten der Abwurfgeschwindikeit seien $v_{0x} = 5\text{m/s}$ für den Ball, und $v_{0x} = 500\text{m/s}$ für das Geschoss. Die vertikale Komponente der Abwurfgeschwindigkeit sei jeweils so bestimmt, dass beide Körper die gleiche horizontale Entfernung $l = 10\text{m}$ zurücklegen.

(a) Berechnen Sie die Wurfhöhen und Wurfzeiten der beiden Körper.

(b) Skizzieren Sie, wie in der Schule üblich, die Flugbahnen in der Wurfebene. Bestimmen Sie die Krümmungen der beiden Bahnen in der Wurfebene.

(c) Skizzieren Sie nun die Flugbahnen in einem Raumzeitdiagramm, nun genannt *Weltlinien.* Zeitkoordinate sei ct mit $c \approx 3 \times 10^8\text{m/s}$ die Lichtgeschwindigkeit. Bestätigen Sie, dass der Krümmungsradius der beiden Weltlinien für kleine Abwurfgeschwindigkeiten $v_{0x}, v_{0z} \ll c$ gegeben ist

$$R = \frac{c^2}{g} \tag{2}$$

Bestätigen Sie, dass für schiefe Würfe auf der Erde $R \approx 9 \times 10^{15}\text{m}$, also ungefähr ein Lichtjahr, $1\text{Lj} = 9,46 \times 10^{15}\text{m}$.

Bemerkung: Der Krümmungsradius hängt nur von der Schwerebeschleunigung und der willkürlich gewählten Lichtgeschwindigkeit ab, nicht aber von der Abwurfgeschwindigkeit. M.a.W R ist eine universelle, die Gravitationswirkung der Erde charakterisierende, geometrische Größe. Aus Sicht der ART sind die Weltlinien von Wurfbewegungen so etwas wie die "Geraden" in einer gekrümmten Raumzeit. Dass sie in Ihrer Skizze (c) "krumm" daherkommen, liegt an der Wahl der Koordinaten: aus Sicht der ART ist die Erde ein beschleunigtes Bezugssystem, und die XYt-Koordinaten sind Koordinaten in einem beschleunigten Bezugssystem. Vgl das vorhergehende Übungsblatt, Stichwort Rindler Raum-Zeit ...

▷ Aufgabe 2 (Schwarze Sterne, Schwarze Löcher . . .)

In Kenntnis der Gravitationstheorie von Sir Isaac Newton (1643–1727) haben schon John Michell (1724–1793) und Pierre Laplace (1749–1827) darauf hingewiesen, dass Licht von der Oberfläche eines Sternes nicht entkommen kann, sofern nur der Radius des Sternes kleiner ist als sein sog. *Gravitationsradius*,

$$R_{\mathrm{G}} := \frac{2GM}{c^2}\,, \tag{3}$$

worin M die Masse des Sterns, G die Gravitationskonstante und c die Geschwindigkeit des emittierten Lichts. Für einen genügend weit entfernten Beobachter ist ein Stern mit Radius $R < R_{\mathrm{G}}$ demnach unsichtbar bzw. schwarz.

(a) Begründen Sie diese Aussage (Stichwort: Fluchtgeschwindigkeit).

(b) Welche Werte haben die Gravitationsradien der Erde, der Sonne?

(c) Unter der Annahme eines kugelförmigen Universums – was ist angesichts seines Alters von ca 14 Milliarden Jahren die mittlere Energie-Massendichte im Universum? Bemerkung: Häh? Dass die Erde und die Sonne in nullter Näherung kugelförmig sind hat man ja schon mal gehört. Aber das Universum? Und was hat denn das Alter mit der Massendichte zu tun? Nun ja, wie das uns zugängliche Universum im einzelnen aussieht wissen wir natürlich nicht. Wir können nur "begründet" vermuten. Dann vermuten wir mal "maximale Symmetrie auf ganz großen Skalen" (was denn sonst: eckig – gezackt – aber wo sollten die Zacken hinzeigen?), behaupten "Gravitationsradius Universum gleich Lichtgeschwindigkeit-mal-Alter" (was denn sonst?) und erhalten eine Abschätzung für den Gravitationsradius des Universum, und via (3) eine Abschätzung seiner Massen-Energiedichte. Vergleichen Sie bitte unbedingt Ihre Abschätzung mit den Daten der Astrophysik!

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird aus dem Gravitationsradius R_{G} der sog *Schwarzschildradius*. Der Schwarzschildradius definiert den Ereignishorizont einer kugelsymmetrischen Masseverteilung. Ist die Masse auf einem Radius $R < R_{\mathrm{G}}$ konzentriert bildet solch eine Masseverteilung ein schwarzes Loch. Einem schwarzern Loch kann nicht entkommen, und alles was hinter den Ereignishorizont fällt ist ein-für-allemal verloren (bis auf Masse bzw. Energie, elektrische Ladung und Drehimpuls – die tragen bei ihrem Fall ins schwarze Loch additiv zu dessen entsprechenden Eigenschaften bei).

(d) Verglichen mit dem was Sie über schwarze Löcher schon gehört haben – inwiefern unterscheidet sich die Phänomenologie eines schwarzen Loches von einem im Laplace'schen Sinne schwarzen Stern?

▷ Aufgabe 3 (Bug on rubberband)

Ein beliebig dehnbares Gummiband ist an einem Ende an der Wand befestigt, während am andere Ende mit einer Geschwindigkeit 1m/sec gezogen wird. Anfänglich hat das Gummiband eine Länge von einem Meter. Ein Käfer, der sich anfänglich am Wand-Ende des Gummibandes befindet, krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit von $0,001$cm/sec das Band entlang. Wird er jemals das andere Ende erreichen – und wenn ja: wann?

Hinweis: Der Käfer krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit $0,001\mathrm{cm/sec}$ *relativ zu seiner momentanen Position* auf dem Gummiband. Würde er gar nicht krabbeln, würde er einfach von dem Band mitgezogen (und das Bandende nie erreichen) ...

Bemerkung: Die Aufgabe ist mittlerweile in "Klassiker" im Mathe-Unterricht der gymnasialen Oberstufe, vgl. etwa https://www.ratsgymnasium-pe.de/ratse/index.php/mathematik-aufgaben/103-aufgabe-der-woche-2009-17.html. Oder auch https://mathematikalpha.de/schnecke-auf-dem-gummiband. Ihr Ursprung datiert 21 July 1976 im Restaurant Aragvi in Tbilisi, wo Lev B. Okun anlässlich einer PhysikerInnen-Konferenz seine TischnachbarInnen mit dem Problem konfrontierte. Es folgte ein großes Palaver. Nur Andrei Sakharov, so die Überlieferung, hatte die Lösung innerhalb einer Minute. Heutzutage ist "The bug on the rubberband" eine beliebte Illustration für die Ausdehnung des Universum nach dem Urknall ...

▷ Aufgabe 4 (Planck-Skala)

Eine kugelförmige Masseverteilung definiert nach Gl. (3) eine Längenskala, den Gravitationsradius R_G, in der ART genannt Schwarzschildradius.

Auch die Quantenmechanik des Massepunktes kommt mit einer charakteristischen Skala – der Comptonwellenlänge

$$\lambda\!\!\!^{-}_\mathrm{C} = \hbar/(Mc) \tag{4}$$

worin $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum und M die Masse des Teilchens. Hat man zwei Theorien, ART und QM, mit jeweils einer Längenskala R_G und $\lambda\!\!\!^{-}_\mathrm{C}$, kann man eine Längenskala definieren – hier genannt die Planck-Länge ℓ_Pl – auf der die beiden Theorien sich treffen,

$$\ell_\mathrm{Pl} := \sqrt{R_\mathrm{G}\lambda\!\!\!^{-}/2} = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 4\times 10^{-35}\mathrm{m}\,. \tag{5}$$

Interessant ist hier, dass diese Längenskala gar nicht von der Masse abhängt! Sie ist absolut – eine Naturkonstante wie G, c oder $\hbar$. Man vermutet daher, dass die Planck-Länge eine untere Grenze für die "Klassikalität = Glattheit" der Raumzeit definiert: auf Längenskalen unterhalb der Planck-Länge, so die Vermutung, ist die Raumzeit "schaumig" oder sonst irgendwie quantig. Die genaue Bedeutung dieser Metaphorik wird derzeit um die Ecke, im Max-Planck Institut für Gravitationsphysik erforscht.

Mit der Längenskala (5) in natürlicher Weise (Divsion durch c) assoziiert eine Zeitskala,

$$t_\mathrm{Pl} := \sqrt{\hbar G/c^5} = 1,4\times 10^{-43}\mathrm{s}\,, \tag{6}$$

und via $E = \hbar\omega \propto \hbar t_\mathrm{Pl}^{-1}$ (quantenmechanisch) bzw $E = mc^2$ (klassisch) eine Massenskala,

$$m_\mathrm{Pl} := \sqrt{\hbar c/G} = 5,5\times 10^{-8}\mathrm{kg}\,. \tag{7}$$

Planck-Länge, -Zeit und -Masse sind Skalen, die die Gültigkeit der klassischen Physik "nach unten" begrenzt. Beispielsweise

(a) Zeigen Sie dass die Masse eines schwarzen Lochs mindestens von Ordnung der Planck-Masse m_Pl ist.
Hinweis: Versuchen Sie mal, ein schwarzes Loch zu lokalisierne, und erinnern Sie sich dabei an die Heisenberg'sche Unschärferelation ...

Als vor einigen Jahren der Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Betrieb genommen wurde, haben machen Kollegen die Vermutung geäußert, es könnten kleine schwarze Löcher entstehen, die die ganze Welt verschlucken.

(b) Versuchen Sie die Argumente dieser Kollegen nachzuvollziehen (Stichwort: $E = mc^c$). Können Sie die Argumente entkräften?

<u>Hinweis:</u> Die Inbetriebnahme des LHC wird im Physik-Journal Oktober 2008 besprochen . . .