Theoretische Physik III (Lehramt)
- SoSe 2018 -

Übungsblatt 04

Ausgabe 05.07.18 – Abgabe 17.07.18 – Besprechung 17.07.2018

▷ Aufgabe 1 (Total oder nicht total)

Sie erinnern sich: Im Falle zweier unabhängiger Variablen x und y ist die Differentialform

$$\delta X = A(x,y)dx + B(x,y)dy \tag{1}$$

genau dann ein totales Differential einer Funktion $X(x,y)$, wenn die sog *Integrabilitätsbedingungen* $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$ erfüllt sind. In diesem Falles auch

$$\oint \delta X = 0\,. \tag{2}$$

Andernfalls ist es unter Umständen (im Falle zweier unabhängiger Variablen immer) möglich, einen integrierenden Faktor $f(x,y)$ zu finden, so dass $dY := f(x,y)\delta X$ ein totales Differential, d.h. so dass $\partial(fA)\partial y = \partial(fB)/\partial x$.

Gegeben die Formen

$$\delta X_\pm = ydx \pm xdy \tag{3}$$

Welche der Formen ist ein totales Differential, welche nicht? Falls eine der Formen nicht ein totales Differential: Lässt sich zumindest ein integrierender Faktor angeben?

▷ Aufgabe 2 (Der zweite Hauptsatz)

In der Vorlesung haben Sie den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kennengelernt. Beweisen Sie die folgenden Variationen des zweiten Hauptsatzes

Rudolf Clausius 1850: Wärme kann nie von selbst von einem kälteren in ein wärmeres Reservoir übergehen.

William Thomson (Lord Kelvin) 1851: Es gibt keine periodisdch arbeitende Maschine, die nur ein Wärmereservoir abkühlt und Arbeit leistet (sog *Perpetuum Mobile Zweiter Art*)

▷ Aufgabe 3 (Heizen im Winter)

Robert Emden, Astrophysiker und Meteorologe, schreibt in einer seiner Arbeiten unter dem Titel “Why do we have heating?”[1]

> Auf die Frage, ‘Warum heizen wir im Winter?’ wird der Laie antworten: Um das Zimmer wärmer zu machen. Ein Kenner der Thermodynamik wird es vielleicht so ausdrücken: Um die fehlende Energie zuzuführen. Dann hat der Laie recht, der Gelehrte unrecht.

[1] *Nature* **141**, 908 (1938); Arnold Sommerfeld hat diese Arbeit in seinem Lehrbuch “Thermodynamik und Statistik” in den Kanon der Jahrhundert-Übungsaufgaben aufgenommen. Die vorliegende Aufgabe ist maßgeblich von Sommerfelds Variante inspiriert.

Welche Wärmemenge braucht es, um die Zimmertemperatur von 0^o Celcius auf 20^o Celcius zu erhöhen? Hat der Laie wirklich Recht, und der Gelehrte Unrecht?
Hinweis: Beachten Sie, dass handelsübliche Zimmer über (mindestens) eine Tür mit Schlüsselloch verfügen.

▷ Aufgabe 4 (Kinetische Defintion der Temperatur)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die Energie eines ein-atomigen idealen Gases der Temperatur T gegeben ist

$$E = \frac{3}{2} N k_{\mathrm{B}} T \tag{4}$$

worin N die Zahl der Atome und k_{B} die Boltzmannkonstante.

Beweisen Sie diese Relation unter Zuhilfenahme der idealen Gasgleichung $pV = Nk_{\mathrm{B}}T$ und einer kinetischen Analyse des Drucks.
Hinweis: Der Druck ist das zeitliche Mittel der Kraft auf die Einheitsfläche der Wand; Kraft ist Impulsänderung pro Zeiteinheit. Jedes Teilchen, das mit Impulskomponente p_x auf die Wand trifft, überträgt einen Impuls $2p_x$ auf die Wand ...

▷ Aufgabe 5 (c_p, c_V and all that ...)

Beweisen Sie: Hängt die innere Energie E eines Gases nur von der Temperatur und Stoffmenge, nicht aber von Druck oder Volumen ab (wie es zum Beispiel beim idealen Gas der Fall ist), sind die spezifischen Wärmen verknüpft

$$c_p = c_V + R \tag{5}$$

worin $R = N_A k_{\mathrm{B}}$ die universelle Gaskonstante. Insbesonder ist c_V beim idealen Gas Temperatur- (und Druck-)unabhänig konstant,

$$c_V = \frac{f}{2} R\,. \tag{6}$$

▷ Aufgabe 6 (Poissonsche Gleichung (Adiabatengleichung))

Beweisen Sie die Poissonsche Gleichung der adiabatisch reversiblen Zustandsänderung eines idealen Molekülgases

$$pV^\gamma = const. \tag{7}$$

worin $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f}$ mit f Zahl der Freiheitsgrade eines Gasmoleküls.

▷ Aufgabe 7

Die thermische und kalorische Zustandsgleichung des Van der Waals-Gases lauten

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,, \tag{8}$$

$$U = \frac{3}{2} N k_{\mathrm{B}} T - N\frac{a}{v} \tag{9}$$

mit $v = V/N$ das spezifische Volumen, und a, b gwisse Konstanten, die die Wechselwirkung der Gasteilchen parametrisieren.

(a) Zeichnen Sie einige aussagekräftige Isothermen im pV-Diagramm. Adiabaten?

(a) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V und Kompressibilität κ.

(c) Bestimmen Sie den physikalischen Verlauf der Isothermen mittels Maxwellkonstruktion.

▷ **Aufgabe 8 (Ideales Gas im Mikrokanonischen Ensemble)** (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde auf den Spuren Boltzmanns die Entropie definiert

$$S := k_\mathrm{B} \ln \Omega\Delta \tag{10}$$

worin Ω das Zustandsintegral und Δ ein kleines Energieintervall, und es wurde die Definitionen der Temperatur und des Drucks angegeben,

$$\frac{1}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}, \qquad \frac{p}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}. \tag{11}$$

Ausgehend vom Mikrokanonischen Zustandsintegral des idealen Gases im Grenzfall großer Teilchenzahl

$$\Omega(E,V,N) = \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{\frac{5N}{2}} \tag{12}$$

beweise man die *Sackur-Tetrode Gleichung*

$$S(E,V,N) = k_\mathrm{B} \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}\right], \tag{13}$$

die *kalorische Zustandsgleichung*

$$E = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T \tag{14}$$

und die *thermische Zustandsgleichung*

$$pV = N k_\mathrm{B} T \tag{15}$$

▷ **Aufgabe 9 (Grenzen der klassichen Physik)** (5 Punkte)

Sie bestätige leicht, dass die Entropie eines idealen Gases als Funktion von T und V die Gestalt annimmt

$$S(T,V,N) = k_\mathrm{B} \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_\mathrm{B} T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}\right]. \tag{16}$$

Auch bestätigen Sie schnell, dass die Entropie für $T \to 0$ nach unten unbeschränkt, und damit im Widerspruch zum Nernstschen Wärmetheorem. Insbesondere wird S unterhalb einer gewissen Temperatur T^* negativ, was als Hinweis gedeutet werden kann, dass für genügend tiefe Temperaturen die klassische Mechanik durch die Quantenmechanik abgelöst werden sollte.

(a) Der in (16) auftretende Faktor $(V/N)^{1/3}$ definiert eine Längenskala *mittlerer Teilchenabstand* (warum?). Auch der Faktor $h^2/(2\pi m k_\mathrm{B} T)$ definiert eine Längenskala, wählt man h =Plancksches Wirkungsquantum genannt die *thermische DeBroglie-Wellenlänge*. Motivieren Sie diese Namensgebung (erinnern Sie sich an die Energie-Impulsbeziehung, die thermische Zustandsgleichung, und die DeBroglie-Beziehung "Impuls gleich h durch Wellenlänge").

(b) Die thermische DeBroglie Wellenlänge ist ersichtlich Temperaturabhängig – je tiefer die Temperatur, desto grß̈er die thermische DeBroglie-Wellenlänge. Es gibt daher einer Temperatur T^*, so dass für $T < T^*$ die Entropie negativ. Berechnen Sie T^*.

(c) Von welcher Ordnung im mittleren Teilchenabstand ist die thermische DeBroglie-Wellenlänge für T^*? Formulieren Sie einen Merksatz aus dem hervorgeht unter welchen Bedingungen die klassiche Beschreibung des idealen Gases ungültig wird und durch eine quantenmechanische Beschreibung abgelöst werden muss.

(d) Woran, glauben Sie, liegt es, dass die klassische Beschreibung bei tiefen Temperaturen defezitär wird? Wird der $1/N!$-Faktor im Gibbsschen Phasenraumvolumen der Ununterscheidbarkeit bei genügend tiefen Temperaturen wirklich gerecht?