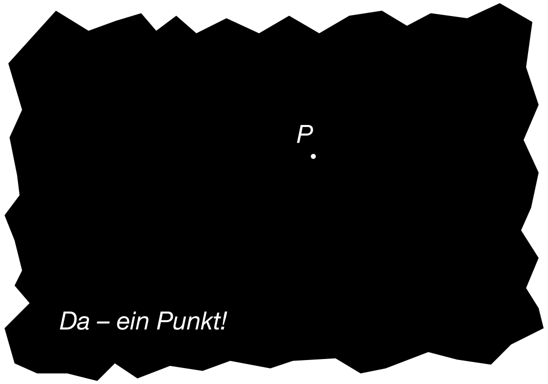
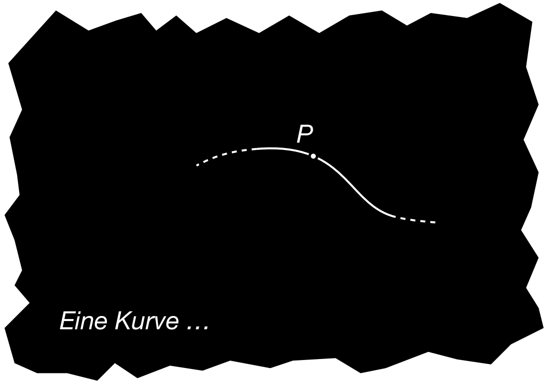
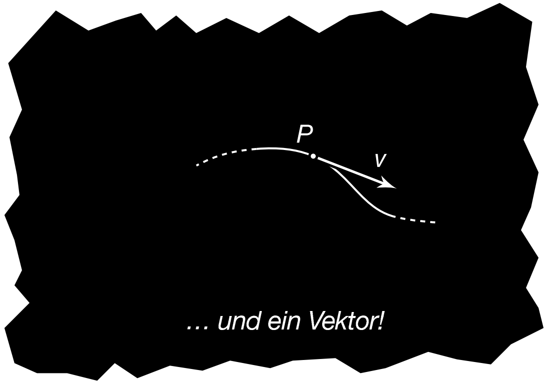
Teil II

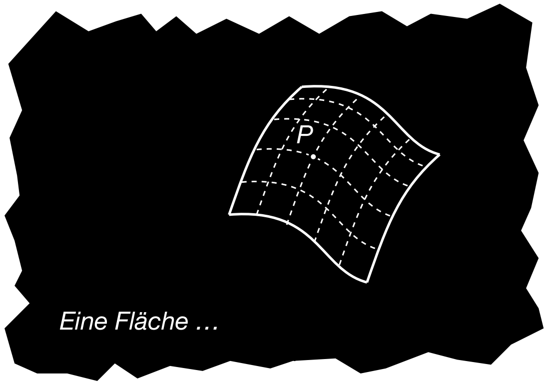
Sommersemester


Der Raum – unendliche Weiten …


P
Da – ein Punkt!


P
Eine Kurve …


P
v
… und ein Vektor!


P
Eine Fläche …


P
… und zwei Vektoren!

Kapitel 17

Was es gibt

`[Im SoSe2013 so nicht gebracht; Inhalte stattdessen auf verschiedene Vorlesungen verteilt]`

Die klassische Physik kennt genau zwei Arten von Dingen: Körper und Feld.[1] Ein Körper ist ein lokales Ding. Er befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einer bestimmten Lage an einer bestimmten Position. Ein Feld, im Gegensatz, ist ein nicht lokales Ding: es befindet sich jederzeit überall (auch wenn sein Wert derzeit nirgendwo verschieden von Null).

[1] "Körper" und "Feld" sind in der klassischen Physik dichotom, d.h. ausschließende Kategorien: ein Ding ist entweder das eine oder das andere – ein Drittes gibt es nicht. In der Quantenphysik wird diese Dichotomie aufgehoben, und durch einen Dualismus (den Welle-Teilchen Dualismus) ersetzt: jedes physikalische Ding ist sowohl Körper als auch Feld.

17.1 Skalares Feld

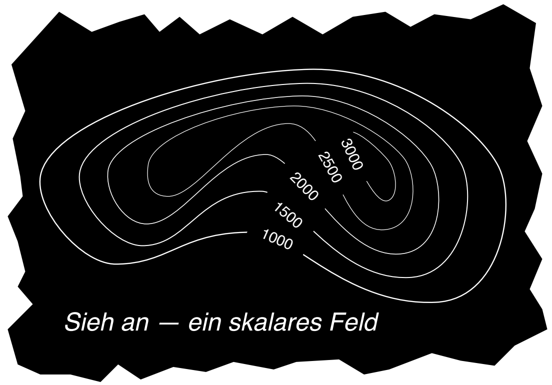
Ein Blumenfeld liefert schon eine schöne Vorstellung für ein Feld (über einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit “Acker”): an jedem Punkt P des Ackers findet sich eine Blume $B(P)$ (naja – nicht an jedem Punkt). Zum Beispiel $B(\text{hier}) = \text{Veilchen}$, $B(\text{dort}) = \text{Tulpe}$, $B(\text{dahinten}) = \text{Rose}$.

In der Sprache der Mathematik ist so ein Feld zunächst einfach eine Abbildung des Raumes M in eine gewisse Menge $\mathcal{F}$, die die möglichen Werte des jeweiligen Feldes beschreibt (das Feld im obigen Beispiel ist “blumenwertig”). Die Temperaturverteilung in einem Zimmer, beispielsweise, kann als Temperaturfeld beschrieben werden, so dass $T(P)$ schlicht die Temperatur im Punkt P angibt. Vereinbart man Temperaturangaben in “Grad Kelvin”, wäre $\mathcal{F}$ die Menge $\mathbb{R}^+$ der nicht-negativen reellen Zahlen. Die Angabe “$T(\text{Nasenspitze}) = 310$” Wäre dann zu lesen “Die Temperatur der Nasenspitze beträgt 310K”[2]. Felder mit reellem (oder komplexem) Wertebereich begenen einem in der Physik häufig unter der Bezeichnung **Skalarfeld**. Weitere Beispiele für skalare Felder wären das eletrostatische Potential und das Gravitationspotential. Auch Dichten, wie beispielsweise Ladungs- oder Massendichte wird zuweilen als Skalarfeld bezeichnet, obwohl es sich eigentlich um einen eigenen Typ **skalare Dichte** handelt.

Ein anschauliches Bild von einem Skalarfeld vermittelt eine ausgewählte Schar räumlicher Flächen (im zwei-dimensionalen: Linien), auf denen das fragliche Feld jeweils einen gegebenen Wert annimmt. Für Temperaturfelder sind das die Isothermen, für Druckfelder die Isobaren. Solche Flächen konstanter Feldwerte, die sog *Niveauflaächen*, heißen auch **Äquipotentialflächen**, eine Namensgebung die man der Elektrostatik bzw. der Potentialtheorie entlehnt hat. Denkt man sich die Äquipotentialflächen für eine handvoll verschiedener Werte eines gegebenen Skalarfeldes realisiert,

[2] entsprechend $36,85°\text{C}$, also fieberfrei.

erscheint das Feld ähnlich einer Zwiebel – und das ist doch schön anschaulich. Noch schöner, wenn das Skalarfeld über eine euklidischen Ebene gegeben ist. Dann kann man sich das Potential als Gebirge vorstellen, mit Höhenlinien als ein-dimensionales Äquivalent der Äquipotentialflächen.

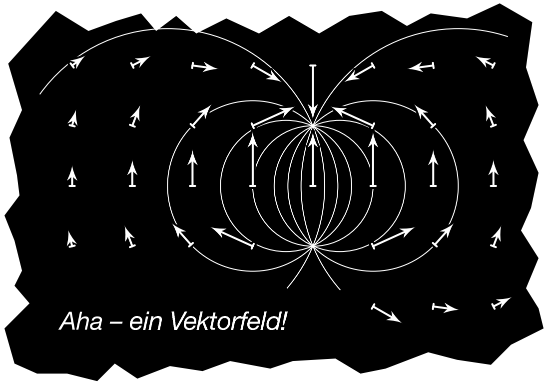


Sieh an — ein skalares Feld

17.2 Vektorfeld

Für ein andere Felder, wie beispielsweise das elektrische Feld, ist $\mathcal{F}$ ein Vektorraum: jedem Punkt P des Raumes ist ein elektrischer Feldstärkevektor $\vec{E}(P)$ zugeordent. Der fragliche Vektorraum in diesem Beispiel ist allerdings nicht ein x-beliebiger linearer Raum. Seine Elemente – die Vektoren – haben vielmehr eine ausgesprochen räumliche Bedeutung: Der Feldstärkevektor gibt die Kraft $\vec{F}$ (angesichts $\vec{F} = m\vec{a}$ auch die Beschleunigung, insbesondere also die räumliche Richtung in der das Teilchen beschleunigt wird) die eine Ladung e erfährt, die sich am Ort P befindet ($\vec{F} = e\vec{E}$ – schon vergessen?). Felder von diesem Typ heißen Vektorfelder. Weitere Beispiels für Vektorfelder wären das magnetische Feld, das Gravitationsfeld, aber auch das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit etc.

Ein anschauliches Bild von so einem **Vektorfeld** erhält man, indem man an gewissen beispielhaften Punkten des Raumes kleine Pfeile anheftet deren Länge die absolute Feldstärke in dem jeweiligen Punkt, und deren Orientierung die Richtung des Feldes in dem jeweiligen Punkt angibt. Bei solchen Bildern ist allerdings zu beachten, dass die Vektoren keine gerichteten Strecken im Raum sind oder ähnliches – ihre Spitzen bezeichnen ja eben keinen Punkt im Raum. Es sind halt Tangentialvektoren (tangential an Feldlinien, s.u.) und keine Geradenstücke. Die einem Raumpunkt $P \in M$ zugeordneten Tangentialvektoren bilden einen eigenen Vektorraum, genannt der **Tangentialraum** $T_P M$. Tangentialräume spielen in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. Der Raum ist dort "krumm" (wie die



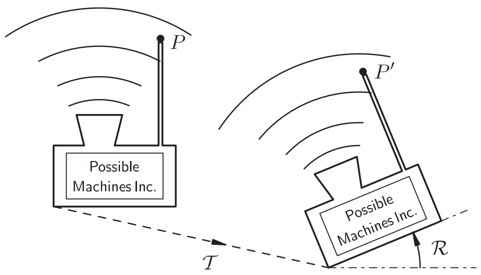


Abb 17.1 *Eine felderzeugende Machine und ihr um $\mathfrak{T}$ verschobenens und um $\mathfrak{R}$ gedrehtes Duplikat. Die Maschine erzeugt ein Feld Ψ, ihr Duplikat das Feld Ψ'. Es ist $\Psi'(P') = \Psi(P)$, wobei $P' = \mathfrak{R}(\mathfrak{T}(P))$.*

Oberfläche einer Kugel, beispielsweise), und bietet daher keinen Platz für gerichtete Strecken. An jedem Punkt lässt sich allerdings eine Tangentialebene einführen, und die liefert schon ein ganz gutes Bild von so einem Tangentialraum.

Eine alternative Methode sich Vektorfelder zu veranschaulichen sind die sog **Feldlinien**, also Kurven, deren Tangentialvektoren in jedem Punkt mit dem Felstärkenvektor zusammenfallen. Diese Variante gibt zwar keine Auskunft über die lokale Feldstärke, vermeidet aber das unruhige Bild mit den vielen Vektoren.

Neben den skalaren Feldern und Vektorfeldern gibt es noch eine ganze Latte weiterer Typen – die sog **Tensorfelder** (alte Sprechweise) bzw Differentialformen (neue Sprechweise). Der Wertebereich ist sind hier die Tensorprodukte des Vektorraums V bzw seines Dualraums V^*. Wir kommen gelegentlich darauf zurück (oder auch nicht). Vorerst bleiben wir bei den skalar- und vektorwertigen Feldern.

17.3 Kovarianz

Physikalische Felder sind nicht nur irgendwelche Abbildungen zwischen Mengen, es sind Abbildungen mit einem ausgeprägt geometrischen Charakter. Damit ist gemeint, dass sie sich – genau wie geometrische Figuren – in wohl bestimmter Weise ändern wenn die sie erzeugenden Maschinen und Geräte verschoben und/oder gedreht werden.

Eine skalares Potential Ψ, beispielsweise, werde durch eine bestimmte Ladungsverteilung – das sind die Quellen des Feldes – erzeugt. Stellt man sich jetzt vor, dass die Ladungsverteilung gedreht wird, erhält man ein neues Potential Ψ' bei der ein mit der Ladungsverteilung gedrehter Messpunkt (schick: Aufpunkt) genau das gleiche Potential anzeigt wie der entprechend ungedrehte Messpunkt bei ungedrehter Ladungsverteilung. Mathematisch wird so eine Drehung durch eine Abbildung

$P \mapsto P' = \mathcal{R}(P)$ beschrieben, wobei P bzw. P' ungedrehter bzw. gedrehter Messpunkt, und nach dem eben gesagten liest sich das Transformationsgesetz für ein skalares Feld unter Drehungen $\Psi'(P') = \Psi(P)$ bzw. $\Psi' \circ \mathcal{R} = \Psi$ oder

$$\Psi \mapsto \Psi' = \Psi \circ \mathcal{R}^{-1}\,. \tag{17.1}$$

Im Bild mit den Äquipotentialflächen muss man hier einfach nur die Zwiebel drehen um zu sehen wie das Potential unter Drehungen der Ladungsverteilung "kovariiert".

Auch ein elektrisches Feld, aufgefasst als Vektorfeld, "kovariiert" mit der Drehung seiner Quellen, nur lautet das Transformationsverhalten etwa anders. Hier werden nämlich auch die Vektoren, die das elektrische Feld charakterisieren, bei einer Drehung der feld-erzeugenden Quellen gedreht, und zwar genauso wie die Quellen selbst. Statt (17.1) also das Transformationsverhalten für Vektorfelder unter Drehungen

$$\vec{E} \mapsto \vec{E}' = R\vec{E} \circ \mathcal{R}^{-1} \tag{17.2}$$

worin $R : V \to V$ die Drehung der elektrischen Feldstärkenvektoren im Vektorraum V bewirkt. Dass wir hier pedantisch die "Drehung von Aufpunkten" (symbolisiert durch $\mathcal{R}$) und die Drehung von Vektoren (symbolisiert durch R) unterscheiden, hat einen einfachen Grund: Aufpunkte sind keine Vektoren, und Vektoren sind keine Aufpunkte. Nur in kartesischen Koordinaten können solche Drehungen mit ein-und-derselben Vorschrift angegeben werden, nämlich R, weil nur in kartesischen Koordinaten Aufpunkte durch (lokalisierte) Vektoren beschrieben werden, die sich halt unter Drehungen genauso verhalten wie Vektoren des Tangentialbündels.

Neben den Drehungen können die Quellen natürlich auch verschoben werden. Sei die entsprechende Operation im Raum beschrieben $P \mapsto P' = \mathcal{T}(P)$, liest sich das Transformationsgesetze für das skalare Feld bzw Vektorfeld unter Verschiebungen

$$\Psi \quad \mapsto \Psi' = \Psi \circ \mathcal{T}^{-1}\,, \tag{17.3}$$

$$\vec{E} \quad \mapsto \vec{E}' = \vec{E} \circ \mathcal{T}^{-1}\,. \tag{17.4}$$

Verschiebungen, auch genannt *Translationen*, bewirken also – im Gegensatz zu den Drehungen – keine Änderung der Feld-Vektoren! Der Vektorraum der elektrischen Feldstärkenvektoren ist eben nicht der affine Raum $\mathbb{E}$ über dem das Feld definiert ist, sondern der Tangentialraum bzw sein Keim V. Und die Tangentialvektoren kovariieren halt unter räumliche Verschiebungen "trivial" (nämlich gar nicht), und unter räumlichen Drehungen nicht-trivial.

Verschiebungen, Drehungen und die räumlichen Spiegelungen sind sog **Isometrien** – genauer Euklidische Isometrien – das sind längen- und winkeltreue Abbildungen im Euklidischen Raum. Eine allgemeine Isomterie kann man aus einer Drehung, einer Verschiebung und möglicherweise einer Spiegelung zusammensetzen, genannt **Euklidische Bewegung**.[3] Die Euklidischen Bewegungen bilden eine Gruppe, die sog **Euklidische Gruppe**. Solange die Zeit keine Rolle spielt, oder wenn man sich nur für einen festen Zeitpunkt t interessiert, werden physikalische Felder danach klassifiziert wie sie sich unter Euklidischen Bewegungen transformieren. Sie heißen skalares Feld, wenn sie sich wie das Temperaturfeld transformieren, und Vektorfeld wenn sie sich wie das elektrische Feld transformieren. Aber auch für die schon erwähnten Tensorfelder gilt: sie transformieren in wohlbestimmter Weise unter Euklidischen Bewegungen, sie sind "geometrische" Dinger.

Wird die Zeit mit in die Betrachtungen einbezogen betritt eine weitere Transformation die Bühne – der sog *Schub*. Der Schub beschreibt die Transformation zwischen gleichförmig bewegten Bezugssysteme. In der nichtrelativistischen Physik sind das die sog *Galilei-Schübe*, in der speziellen Relativitätstheorie sind das *Lorentz-Schübe*. Fasst man alle Isometrien zusammen erhält man die Galileigruppe bzw Poincarégruppe. Tensorfelder werden dann nach ihrem Transformationsverhalten unter Galilei- bzw Poincarétransformationen klassifiziert.

[3] Die Namensgebung ist hier etwas unglücklich: eine Euklidische Bewegung hat mit Bewegung im Sinne von zeitlicher Änderung nichts zu tun. Es ist halt einfach nur eine Transformation.

Wenn man schon mit geometrischen Größen hantiert ist man gut beraten, das auch in der Notation auszudrücken. Naturgesetze, beispielsweise, sollten so formuliert werden dass die Kovarianz (der Felder mit den Quellen) offen zu Tage tritt. Dann kann man besser sehen, ob jemand einen Fehler macht (indem er z.B. schreibt "Vektor = Skalar") ...

Die Elektrodynamik ist hier das Paradebeispiel anhand dessen die PhysikerInnen (und MathematikerInnen) im Laufe der Zeit gelernt haben den Anspruch nach "genereller Kovarianz" in der Notation sukzessive einzulösen.

17.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 17-1**

Gegeben ein skalares Feld $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$, mit a, b gewisse fest gewählte Konstanten, sog *Parameter*.

(a) Machen Sie sich ein Bild von ϕ für den Fall $a = 2, b = 1$, etwa in dem Sie einige typische Äquipotentiallinien zeichnen. Wie würden Sie so ein typische Äquipotentiallinie mit einem einzigen Wort charakterisieren?

(b) Das hier studierte skalare Feld wird durch eine entlang der x-Achse orientierte Maschine erzeugt. Welches Feld erhalten Sie, wenn die Maschine entgegen dem Uhrzeigersinn um 30 Grad gedreht wird?

▷ **Aufgabe 17-2**

Gegeben ein Vektorfeld $\vec{E}$, in einer kartesischen Karte notiert

$$\vec{E}(x,y) = \frac{x}{a^2}\vec{e}_x + \frac{y}{b^2}\vec{e}_y\,. \tag{17.5}$$

(a) Machen Sie sich ein Bild für den Fall $a = 2, b = 1$ (i) mittels Vektorpfeilchen, (ii) mittels Feldlinien.

(b) Das hier studierte Feld wird durch eine entlang der x-Achse orientierte Maschine erzeugt. Welches Feld erhalten Sie, wenn die Maschine entgegen dem Uhrzeigersinn um 30 Grad gedreht wird?

(c) Was fällt im Vergleich mit den Einsichten aus Aufgabe 17-1 auf?

