Kapitel 18

Kurven im $\mathbb{R}^3$

Der Schwerpunkt eines physikalischen Körpers, einer Kartoffel beispielsweise, wird durch die Angabe seiner Koordinaten in einem Bezugssystem räumlich lokalisiert. Bewegt sich die Kartoffel durch den Raum, beschreibt ihr Schwerpunkt im Laufe der Zeit eine Raumkurve

$$\begin{aligned} \vec{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18.1}$$

worin die Koordinaten x, y, z nun Funktionen der Zeit, die die Bewegung des Schwerpunkts beschreiben. So beschreibt $x(t) = a\cos\omega t$, $y(t) = a\sin\omega t$, $z(t) = ht$ beispielsweise eine spiralförmige Bewegung.

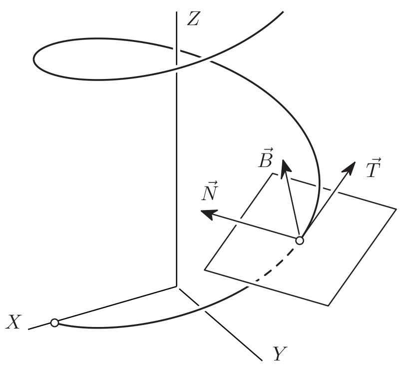

Abb 18.1 *Spur eines Teilchens in spiralförmiger Bewegung; gezeigt sind auch Tangential- Normal- und Binormalenvektoren, nebst Schmiegeebene.*

18.1 Parametrisierte Kurve

Die Abbildung (18.1) definiert in mathematischer Hinsicht eine vektorwertige Funktion (wir sehen den $\mathbb{R}^3$ hier als Vektorraum), genannt eine *parametrisierte Kurve* (im $\mathbb{R}^3$), und t heißt in diesem Zusammenhang *Kurvenparameter*.

Von so einer parametrisierten Kurve kann man sich natürlich ein Bild machen, etwa in Form der Punktmenge $\{\vec{r}(t)|t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, genannt die *Spur* der Kurve $\vec{r}$. Man beachte allerdings, dass man einer Spur nicht ansieht, mit welchem "Fahrplan" die Kurve durchlaufen wird (*wann* das Teilchen *wo* ist).

18.2 Geschwindigkeit und Tangenten-Einheitsvektor

Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{r}$ ist definiert

$$\frac{d\vec{r}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} . \qquad (18.2)$$

wobei der Punkt auf dem Kopf eine Kurzform für die Ableitung, $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$.[1]

Geometrisch ist die Differenz $\Delta\vec{r}(t) := \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ ein Sekantenabschnitt der Kurve $\vec{r}$ bei t, im Limes $\Delta t \to 0$ wird aus dem Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta\vec{r}/\Delta t$ der *Tangentialvektor* an die Kurve $\vec{r}$ zum Parameterwert t. Physikalisch ist das die Geschwindigkeit, mit der sich das Teilchen momentan (d.h. zum Zeitpunkt t) bewegt.

[1] Je nach Kontext wird die eine oder andere Schreibweise bevorzugt. Die Notation mit den Differentialen geht auf Leibniz zurück, die Notation mit dem Punkt auf Newton (Newtons *Fluxion*).

Die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ ist ein Vektor. Sein Betrag, die *Schnelligkeit*,

$$\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \tag{18.3}$$

gibt an, wie schnell sich das Teilchen momentan bewegt. Der auf eins normierte Vektor

$$\vec{T}(t) := \frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}\dot{\vec{r}}(t) \tag{18.4}$$

heißt der *Tangenten-Einheitsvektor* an die Kurve $\vec{r}$ zum Parameterwert t. Er gibt die Richtung, in der das Teilchen momentan unterwegs ist.

Die Länge eines durch t_i und $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ bestimmten Abschnitts der Kurve wird von unten abgeschätz durch

$$\begin{aligned} \Delta s_i &:= |\Delta\vec{r}(t_i)| = \sqrt{(\Delta x(t_i))^2 + (\Delta y(t_i))^2 + (\Delta z(t_i))^2} && (18.5)\\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z(t_i)}{\Delta t}\right)^2}\Delta t && (18.6) \end{aligned}$$

Die Abschätzung ist umso besser, je kleiner Δt gewählt wird. Im Limes beliebig feiner Unterteilungen erhält man durch Riemann-Summation von () die Weglänge,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\dot{\vec{r}}(t')\right| dt' \tag{18.7}$$

auch genannt die *Bogenlänge* der Kurve zwischen den Punkten $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{r}(t)$. Offensichtlich

$$\dot{s}(t) \equiv \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| \tag{18.8}$$

d.h. die Schnelligkeit (rechte Seite) ist die Rate, mit der die Bogenlänge im Lauf der Zeit zunimmt (linke Seite). Erinnert man sich hier an die Bedeutung des Punktes,

$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt}$, multipliziert mit dt, schaut man auf $ds(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|dt$, genannt das *Bogenmaß* der Kurve r zum Parameter t. Das Bogenmaß gibt die Entfernung, die das Teilchen, das mit Schnelligkeit $|\dot{\vec{r}}(t)|$ längs der Kurve $\vec{r}$ unterwegs ist, im Intervall $[t, t+dt]$ zurücklegt.

18.3 Beschleunigung und Hauptnormale

Als Funktion der Zeit ist die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ eine vektorwertige Funktion;[2] ihre Ableitung,

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{\vec{r}}(t+\Delta t) - \dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t} = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}, \tag{18.9}$$

bedeutet physikalisch die Beschleunigung, die ein Teilchen bei seiner Reise auf der Kurve $\vec{r}$ momentan (d.h. zum Zeitpunkt t) erfährt.[3]

Die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ ist ein Vektor, und kann daher in zwei Kompontenten zerlegt werden, eine Komponente in Richtung der momentanten, durch $\vec{T}(t)$ gegebenen Bewegungsrichtung, und eine Komponente senkrecht dazu,

$$\ddot{\vec{r}}_{\parallel} = (\vec{T} \cdot \ddot{\vec{r}})\vec{T}, \qquad \ddot{\vec{r}}_{\perp} \equiv \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_{\parallel}. \tag{18.10}$$

Die Parallel-Komponente berechnet sich zu $\ddot{\vec{r}}_{\parallel} = \ddot{s}\vec{t}$, d.h. sie ist durch die zeitliche Änderung der Schnelligkeit bestimmt. Die Normalkomponente $\ddot{\vec{r}}_{\perp}$ berechnet sich zu

[2] Die Zuordnung $t \mapsto \dot{\vec{r}}$ definiert eine Kurve im Geschwindigkeitsraum des Teilchens, sog *Hodograph*.

[3] Man beachte, dass das Newtonsche $\ddot{r}(t)$ synonym für das Leibnizsche $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$, kurz $\ddot{r}(t) \equiv \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$. Notation, Notation ....

$\ddot{\vec{r}}_\perp = \dot{s}\dot{\vec{T}}$, d.h. sie ist wesentlich durch die Änderung der Bewegungsrichtung (d.h. $\dot{\vec{T}}$) bestimmt.

Führt man an dieser Stelle den sog. *Normaleneinheitsvektor* $\vec{N}$,

$$\vec{N}(t) := \frac{1}{\left|\dot{\vec{t}}(t)\right|}\dot{\vec{t}}(t)\,, \tag{18.11}$$

und die sog. *Krümmung* κ ein,

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)}\left|\dot{\vec{T}}(t)\right|\,, \tag{18.12}$$

lässt sich die Beschleunigung schreiben

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \dot{s}(t)^2\kappa(t)\vec{N}(t)\,. \tag{18.13}$$

In der Physik fungiert $\dot{s}^2\kappa\vec{N}$ unter dem Begriff *Zentripetalbeschleunigung*. Die Zentripetalbeschleunigung weist – senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung $\vec{T}$ – in Richtung der *Änderung* der Bewegungsrichtung ($\vec{N} \propto \dot{\vec{T}}$ - vgl. Gl ()); ihre Stärke ist proportional der Krümmung der Bahnkurve.

Im Gegensatz zur Schnelligkeit ist die Krümmung eine geometrische Größe: ihr Wert an einem gegebenen Punkt auf der Kurve ist unabhängig von der Paramentrisierung der Kurve, und ist allein durch die Spur der Kurve bestimmt (die Spur selbst ist eine rein geometrische Grösse).

18.3.1 Binormale und begleitendes Dreibein

Zur Tangente $\vec{T}$ und Hauptnormalen $\vec{N}$ gesellt sich nun noch ein weiterer Einheitsvektor,

$$\vec{B} := \vec{T} \times \vec{N}\,, \tag{18.14}$$

genannt die *Binormale*. Die Vektoren $\vec{T}$ und $\vec{N}$ liegen in der lokalen, durch die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ bestimmten Kurvenebene, genannt die *Schmiegeebene*, der Binormalenvektor senkrecht darauf. Das Tripel $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ bildet ein Dreibein eines Koordinatensystems, genannt das *begleitende Dreibein*.

Angesichts $\vec{T} \times \vec{T} = 0$ und $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$ ergibt sich $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \dot{s}(t)^3 \kappa(t) \vec{B}(t)$. Da aber $\left|\vec{B}(t)\right| = 1$ folgt $\left|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right| = \dot{s}(t)^3 \kappa(t)$, und also

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}, && (18.15)\\
\vec{B}(t) &= \frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right|} \dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) && (18.16)
\end{aligned}
$$

Eine zeitliche Änderung der Binormale beschreibt die zeitliche Änderung der Schmiegeebene, d.i. das Herauswinden der Kurve aus der momentanen Schmiegeebene. Die Änderungsrate des Binormalenvektors, bezogen auf die Bogenlänge, $\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\vec{B}}(t)$, nennt man den *Torsionsvektor* der Kurve $\vec{r}$ zum Parameterwert t. Da $\vec{B}$ Einheitsvektor, ist $\dot{\vec{B}}$ orthogonal zu $\vec{B}$, und wegen $\dot{\vec{B}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\vec{T} \times \vec{N}\right) = \dot{\vec{T}} \times \vec{N} + \vec{T} \times \dot{\vec{N}} = \vec{T} \times \dot{\vec{N}}$ auch orthogonal zu $\vec{T}$, ergo $\dot{\vec{B}}$ parallel zu $\vec{N}$. Es gibt daher eine skalare Funktion τ, genannt die *Torsion*, bestimmt durch

$$
\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t) \vec{N}(t)\,. \tag{18.17}
$$

Ausgedrückt durch Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$, Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ und Beschleunigung-Änderungsrate $\dddot{\vec{r}}$

$$\tau(t) = \frac{\det\left(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dddot{\vec{r}}(t)\right)}{\left|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right|^2} \tag{18.18}$$

(Beweis: Übungen). Auch die Torsion ist, wie die Krümmung, eine rein geometrische Größe, d.h. sie hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

18.3.2 Die Frenetschen Formeln

Jede parametrisierte Kurve lässt sich nach der Bogenlänge parametrisieren. Dazu muss nur die Gleichung $s(t) = s$ nach t umgestellt werden, $t = t(s)$ (wobei nun $t(s)$ ein Funktion von s), und das Resultat in die Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ eingesetzt werden. Die durch $\vec{q}(s) := \vec{r}(t(s))$ beschriebene, nach der Bogenlänge s parametrisierte Kurve, hat die gleiche Spur wie $\vec{r}(t)$. Angesichts $\frac{d}{ds}\vec{q}(s) = \frac{d}{ds}\vec{r}(t(s)) = \dot{\vec{r}}(t(s))\frac{d}{ds}t(s) = \vec{T}(t(s))\dot{s}\frac{d}{ds}t(s) = \vec{T}(t(s))$ ist die Bogenlänge als Parameter dadurch ausgezeichnet, dass die Tangentialvektoren konstant vom Betrag 1 sind.

Einer Raumkurve $\vec{r}(s)$ mit der Bogenlänge s als Parameter ist zu jedem Wert von s ein begleitendes Dreibein $\left(\vec{T}(s) \equiv \frac{d\vec{r}(s)}{ds}, \vec{N}(s), \vec{B}(s) = \vec{T} \times \vec{N}\right)$ zugeordnet. Schreitet man die Kurve entlang, variiert das begleitende Dreibein gemäß der sog *Frenetsche Formeln*,

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \kappa(s)\vec{N}(s)\,, \quad \frac{d\vec{N}(s)}{ds} = \tau(s)\vec{B}(s) - \kappa(s)\vec{T}(s)\,, \quad \frac{d\vec{B}(s)}{ds} = -\tau(s)\vec{N}(s)\,. \tag{18.19}$$

worin Krümmung κ und Torsion τ Skalare,

$$\kappa(s) = \vec{N}(s) \cdot \frac{d\vec{T}(s)}{ds}\,, \quad \tau(s) = -\vec{N} \cdot \frac{d\vec{B}(s)}{ds}\,. \tag{18.20}$$

18.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 18-1 (Krumm oder nicht krumm)** (6 Punkte)

In der Physik wird eine Kurve, wenn man sie denn konkret angeben muss, immer über ihre Koordinatenfunktionen in einer irgendwie gewählten Karte spezifiziert. Alice etwa, geht in die Welt, vermisst eine Kurve K, gibt ihren Koordinaten Namen $\bar{x}$, bezeichnet ihre Kurvenparamter λ, und fasst ihr Messprotokoll zusammen $\bar{k}(\lambda) = (1.0, \lambda, \lambda)$. Auch Bob geht in die Welt, vermisst die gleiche Kurve (aber mit anderen Instrumenten), gibt seinen Koordinaten den Namen x, bezeichnet seinen Kurvenparamter τ, und fasst zusammen $k(\tau) = (\cos(\tau), \sin(\tau), \tau)$.

(a) Alice und Bob stellen ihren jeweiligen Fund graphisch dar. Tun Sie es den beiden nach!

(b) Die beiden streiten sich, ob die vermessene Kurve nun gerade ist oder nicht. Können Sie den Streit schlichten? Welche Zusatzinformation benötigen Sie gegebenenfalls, um ein Urteil zu fällen?

▷ **Aufgabe 18-2 (Im Spaßbad ...)** (12 Punkte)

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Schraubenlinie im Erdgravitationsfeld der Feldstärke g. Die Achse der Schraubenlinie (z-Achse) liege vertikal; sie fällt mit der Richtung des Feldes zusammen.

Die Parameterdarstellung der Schraubenlinie in kartesischen Koordinaten ist

$$x(\varphi) = a\cos\varphi\,, \qquad y(\varphi) = a\sin\varphi\,, \qquad z(\varphi) = c\varphi\,. \tag{18.21}$$

Der Kurvenparamter φ ist der Winkel, den die Projektion des Radiusvektors auf die (x, y)-Ebene mit der x-Achse bildet, $0 \le \varphi < \infty$.

MACHEN SIE SICH EIN BILD!

Bestimmen Sie die Beschleunigung, die der Massepunkt im Erdfeld besitzt. Berechnen Sie seine Bahngeschwindigkeit und den zurückgelegten Weg (die Bogenlänge s) als Funktion der Zeit t. Die Anfangsbedingungen für diese Größen sind $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.

Zur Lösung benötigen Sie Kenntnisse der Differentialgeometrie für Raumkurven. Berechnen Sie der Reihe nach

1. die Bogelänge der Kurve,
2. den Tangenteneinheitsvektor,
3. die Krümmung der Kurve,
4. den Hauptnormaleneinheitsvektor und
5. den Binormalenvektor in einem Kurvenpunkt.

Tangentenvektor und Normalenvektor spannen die Schmiegeebene auf. Der Stellungsvektor dieser Ebene ist der Binormalenvektor; diese drei Vektoren bilden das begleitende Dreibein der Kurve.

Aus der Bestimmung dieser Größen folgt die gesuchte Beziehung.

Hinweis: Die Aufgabe wurde entnommen: Reinhard Tiebel, *Theoretische Mechanik in Aufgaben*, Wiley-VCH (2006). Ihre Lösung ist für alle Liebhaber von Spaßbad-Wasserrutschen von Bedeutung. Wüssten Sie, warum?

▷ **Aufgabe 18-3 (Implizite Kurve)*** (2 Punkte)

Kurven können, müssen aber nicht in parametrisierter Form angegeben werden. Eine beliebte Alternative ist, Kurven als Lösungsmengen von Gleichungen anzugeben.

Betrachte etwa die Gleichung $x^2+y^2=1$. Nach y aufgelöst $y_\pm(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$. Der Graph der beiden Funktionen $y_\pm$ ist ein Kreis in der xy-Ebene.

Welche Kurve wird durch die Lösungmenge $\{x^2/a^2+y^2/b^2=1|x,y\in\mathbb{R}\}$ beschrieben?

▷ Aufgabe 18-4 (PISA Frage)

Zeit für eine Frage, die ursprünglich im ersten PISA Test unseren lieben 15-jährigen vorgelgt wurde: Um einen runden Stab mit Radius a und Länge b sei von Stabanfang bis Stabende c mal eine Schnur in Form einer Helix gewickelt. Wie lang ist die Schnur?

