Kapitel 19

Elemente der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

19.1 Partielle Ableitung

Hat man eine Funktion f von n Variablen, $f(x^1, \ldots, x^n)$ kann man sich dafür interessieren, wie sich f ändert, wenn nur eine der n Variablen variiert, die anderen Variable aber feste Werte annehmen. Sei x^i die fragliche Variable, notiert man den entsprechenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^i + h, \ldots x^n) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots x^n)}{h} \tag{19.1}$$

genannt die *partielle Ableitung* von f nach x^i.

Partielle Ableitungen funktionieren also genauso wie übliche Ableitungen: nach der im Nenner genannten Variable differenzieren, alle anderen Variable als Konstante auffassen. Zum Beispiel

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy\,. \tag{19.2}$$

Im übrigen darf man Summen- und Produktregel der elementaren Differentialrechnung einfach auf partialle Ableitungen übertragen.

Auch werden Mehrfachableitungen in Analogie zur elementaren Differentialrechnung rekursiv eingeführt,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_n} \cdots \partial x^{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{n-1}}} \left(\cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \right) \cdots \right) \right)\,. \tag{19.3}$$

nur dass jetzt halt nach verschiedenen Variablen differenziert werden kann. Mehrfachableitungen sind im übrigen kommutativ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_2} \partial x^{i_1}} \tag{19.4}$$

eine wichtige Regel, die Sie in den Übungen beweisen.

Schließlich erinnert man sich an die Kettenregel zur Ableitung impliziter Funktionen: hängt $f(x)$ explizit von x ab, die Variabel x aber von einer Variablen t, $x = x(t)$, sagt man f hänge implizit von t ab, notiert $f(x(t))$ mit Ableitung $\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\frac{df(x)}{dx}$. Übertragen auf Funktionen von n Variablen,

$$\frac{df(x^1(t), \ldots x^n(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,. \tag{19.5}$$

Beweis: Übungen.

19.2 Integration im $\mathbb{R}^n$

Bei der Entwicklung der Integrationstheorie spielten die Intervalle eine wichtige Rolle; hier sind es die Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \tag{19.6}$$

und das Intervallmaß verallgemeinert sich zum n-dimensionalen Volumen

$$v(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n) \tag{19.7}$$

Für das Integral der konstanten Funktion $f(x) = c$ über einen Quader Q verabreden wir in Analogie zum ein-dimensionalen Fall

$$\int_Q c dV = cv(Q)\,. \tag{19.8}$$

Man unterteilt Q in kleine Unterquader, und wählt für jeden Unterquader Q_i Schranken k_i, h_i

$$k_i \leq f(x) \leq h_i\,, \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i \tag{19.9}$$

$$U(Z) := \sum_{i=1}^{N} k_i v(Q_i)\,, \qquad O(Z) := \sum_{i=1}^{N} h_i v(Q_i) \tag{19.10}$$

Definition “Riemann-integrierbar”: Eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* über Q wenn sich zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zange Z für f mit einer Toleranz $O(Z) - U(Z) < \varepsilon$ angeben läßt.

Ist f Riemann-integrierbar, so gibt es genau eine Zahl I für die $U(Z) \leq I \leq O(Z)$ für alle Zangen, in die f genommen werden kann, und diese Zahl heißt das Integral von f über Q, notiert $\int_Q f(x)d^n x$.

Jede Funktion, die auf ganz Q stetig ist, ist integrierbar. Für solche Funktionen lässt sich das Integral rekursiv berechnen,

$$\int_Q f(x)d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left[\cdots \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx^1\right] dx^2\right] \cdots\right] dx^n \tag{19.11}$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \cdots dx^n\,, \tag{19.12}$$

sog. *Mehrfachintegral*. Auf die Reihenfolge der Integrationen kommt es dabei nicht an,

$$\int_{a_i}^{b_i} dx^i \int_{a^j}^{b_j} dx^j = \int_{a_j}^{b_j} dx^j \int_{a^i}^{b_i} dx^i \tag{19.13}$$

(Motivation und Beweis: Jänich *Mathematik 1*, S. 130ff und S. 519–520).

Der Integrationsbereich sollte kompakt, aber nicht unbedingt quaderförmig sein, damit das Integral exisitert. Sei nämlich Ω ein solcher Bereich, dann kann man sicherlich einen Quader Q finden, $\Omega \subset Q$, und setze doch einfach $f(x) = 0$ für $x \in Q \setminus \Omega$. Damit ist dann allerdings f nicht mehr auf ganz Q stetig. Sofern der Bereich Ω allerdings hinreichend gutartig, insbesondere "stetig berandet" exisistiert das Integral, und lässt sich analog () rekursiv berechnen (Satz von Fubini)

$$\int_\Omega f(x)d^n x = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x^1)}^{b_2(x^1)} \cdots \int_{a_n(x^1,\ldots,x^{n-1}}^{b_n(x^1,\ldots,x^{n-1}} f(x^1, \ldots, x^n)dx^n \cdots dx^1\,. \tag{19.14}$$

Unter eine Variablentransformation $x \mapsto \xi$, non-chalant notiert $\xi = \xi(x)$ bzw Umkehrung $x = x(\xi)$, transformiert das Integral

$$\int f(x) d^n x = \int f(x(\xi)) \left|\det(J(\xi))\right| d^n\xi \tag{19.15}$$

worin $\det(J(\xi))$ die Determinante der Jacobimatrix $J^i{}_j(\xi) = \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^j}$.[1] Sei nämlich $d^n\xi$ das Volumen eines infinitesimal kleinen, bei ξ_P lokalisierten Quaders im ξ-Raum. Unter der Trafo $\xi \to x = x(\xi)$ wird dieser Quader auf ein Parallelepiped abgebildet dessen Volumen $d^n x = |\det J| d^n\xi$, wo J die bei $x_P = x(\xi_P)$ linearisierte Transformation, $x(\xi) \approx x_P + \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi - \xi_P)$.

19.3 Aufgaben

▷ Aufgabe 19-1

Man berechne die partiellen Ableitungen der Funktion $V(\vec{x}) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ wo γ reellwertige Konstante.

Die partiellen Ableitungen sind Komponenten eine Kraftfeldes $\vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z)^T = -(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})^T$. Machen Sie sich ein Bild von $\vec{F}$.

▷ Aufgabe 19-2 (Schwerpunkt)

In der Physik ist der Schwerpunkt eines Körpers K definiert

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_K \mu(\vec{x}) \vec{x} d^3x \tag{19.16}$$

[1] Zuweilen notiert $\det(J(\xi)) = \frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\xi^1,\ldots\xi^n)}$

worin $\mu(\vec{x}) = \mu(x,y,z)$ die Massendichte, und $M = \int_K \mu(\vec{x}) d^3x$ die Gesamtmasse des Körpers.

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer vierseitigen geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a und Höhe h.

▷ Aufgabe 19-3 (Trägheitsmoment)

In der Physik ist das Trägheitsmoment um die Achse ζ eines Körpers K definiert

$$\theta_\zeta := \int_K \mu(\vec{x}) \rho_\zeta^2(\vec{x}) d^3x \tag{19.17}$$

worin $\mu(\vec{x}) = \mu(x,y,z)$ die Massendichte und $\rho_\zeta(\vec{x}) = \rho_\zeta(x,y,z)$ der senkrechte Abstand eines Punktes $\vec{x}$ von der Achse ζ.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Quaders mit Kantenlängen a, b, c und konstanter Massendichte um eine Achse durch die Seitenmitten.

▷ Aufgabe 19-4

Für die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ berechne man das Integral $\int\int_A f(x,y) dx dy$ wo A ein Kreisringsektor in der XY-Ebene, radial begrenzt durch ρ_0, ρ_1, azimuthal φ_0, φ_1.

<u>Hinweis:</u> Transformation auf ebene Polarkoodinaten erleichtert die Rechnung ...

