Kapitel 20

Gradient und so

20.1 Richtungsableitung und totales Differential

Hat man eine Funktion $f(x^1, \ldots, x^n)$, kann man sich für die Funktionswerte interessieren, die einem begegnen, wenn man eine gegebene Kurve $x(\lambda) = (x^1(\lambda), \ldots, x^n(\lambda))$ durchläuft. Die fraglichen Werte sind dann offensichtlich gegeben$f(x^1(\lambda), \ldots, x^n(\lambda))$. Schreitet man nun von einem Punkt $(x^1(\lambda_0), \ldots, x^n(\lambda_0))$ zu einem benachbarten Punkt $(x^1(\lambda_0) + \Delta x^1, \ldots, x^n(\lambda_0) + \Delta x^n$ auf der Kurve, ändert sich f um ein kleines bisschen Δf. Der entsprechende Differentialquotient, in diesem Zusammenhang genannt die *Richtungsableitung* von f (entlang der Kurve $x(\lambda)$ zum Parameterwert λ_0), berechent sich unter Zuhilfenahme der Kettenregel zu

$$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\lambda_0} . \tag{20.1}$$

Lässt man hier den "Erinnerungs-Subskript" unter den Tisch fallen, kürzt $d\lambda$ auf beiden Seiten der Gleichung, schaut man auf

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{20.2}$$

ein Ausdruck, genannt das *totale Differential* von f. Anschaulich gibt das totale Differential df die Änderung Δf, die man an einem "f-Messgerät" abliest, wenn man von einem Punkt zu einem benachbarten Punkt voranschreitet wenn die Schrittgröße (die Δx^i) wahnsinnig klein gewählt wird, informell $\Delta x^i \to dx^i$. [1]

20.2 Gradient

Um die Sache nicht unnötig kompliziert zu machen, konzentrieren wir uns auf $n = 3$ (also "physikalischer Raum"), und rufen die Punkte kurz und bündig bei ihrem kartesischen Koordinatentripel (x, y, z) bzw. Ortsvektor $\vec{x} = (x, y, z)^T$.

Wir denken uns ein skalares Feld gegeben, in unserer kartesischen Karte repräsentiert durch eine reellwertige Funktion $f(x, y, z)$ (denken Sie an eine Temperaturverteilung

[1] Wahnsinnig kleine Schritte werden in der Mathematik durch Differentiale ausgedrückt, in diesem Zusammenhang notiert dx^i, und also $df = f(x+dx) - f(x)$. Pedanten wenden hier ein, dass wahnsinnig kleine Schritte – also Schritte, die kleiner sind als jeder endliche Schritt – notwendig vom Null-Schritt nicht zu unterscheiden sind, die ganze anschauliche Vorstellung von Differentialen also für die Katz. Sie führen Differentiale dann beispielsweise als sog Differentialformen ein – eine bei x lokalisierte Differentialform (wie beispielsweise df oder auch die dx^i) ist Kovektor zum Tangentialraum $T_x\mathbb{E}$ – erläutern das Konzept dann aber auf Nachfrage mit "kleinen Schritten" Δx, die unter der Linearform dx^i abgebildet werden $dx^i(\Delta x) = \Delta x^i$. Sie sollten sich gelegentlich mit der Vorstellung "Differential ist Linearform (also eigentlich Abbildung)" vertraut machen. Es hilft Ihnen, gewisse Untiefen, die in der Physik lauern, zu umschiffen . . .

in einem Zimmer). Das Prädikat “skalar” bedeutet für unser Feld, dass unter einem Kartenwechsel $x \mapsto x'(x)$ das Feld transformiert $f \mapsto f'$ mit $f'(x') = f(x)$, bzw. ausführlich $f'(x') = f(x(x'))$, wo $x(x')$ das Inverse des fraglichen Kartenwechsel.

Das Tupel $(\partial f)(\vec{x}) := (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, ausgewertet für einen festen Punkt $\vec{x}$, ist dann zunächst einfach nur ein Zahlentripel. Im Gegensatz zu einem Zahlentripel wie “Alter, Schuhgrösse, Bundweite” hat $(\partial f)(\vec{x})$ allerdings eine geometrische Bedeutung: (1) es definiert eine Vektor, genannt der *Gradient* von f (an der Stelle $\vec{x}$),

$$\mathrm{grad} f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T \tag{20.3}$$

der (2) senkrecht auf der durch $\vec{x}$ verlaufenden Niveaufläche (Fläche konstanten f, zuweilen auch genannt Äquipotentialfläche) steht, dessen Richtung in Richtung der größten Änderung von f zeigt, und dessen Betrag eine Maß für das Gefälle in dieser Richtung.

Zum Beweis von (2) stellt man zunächst fest, dass der Vektorcharakter des Gradienten es erlaubt, die Richtungsableitung (20.1) als Skalarprodukt eines Tangentialvektors (die $\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$ sind Komponenten des Tangentialvektors an die Kurve $x^i(\lambda)$) mit dem Gradienten zu schreiben. Für gegebene Länge des Tangentialvektors ist die Richtungsableitung maximal, wenn der Tangentialvektor in Richtung des Gradienten zeigt. Wenn man also, von einem gegebenen Punkt $\vec{x}$ ausgehend, in Richtung des Gradienten voranschreitet ändert sich f am schnellsten. Läuft man allerdings senkrecht zu dieser Richtung, ändert sich f gar nicht. In so einer Richtung ist f konstant – man läuft auf einer Äquipotentialfläche.

Der Beweis von (1), dass die Zahlenspalte $(\mathrm{grad} f)(\vec{x})$ also tatsächlich einen Vektor darstellt, wird geführt, indem man zeigt, dass sich die drei Zahlen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ unter einer Drehung des Koordinatensystems genauso transformieren wie die Koordinaten

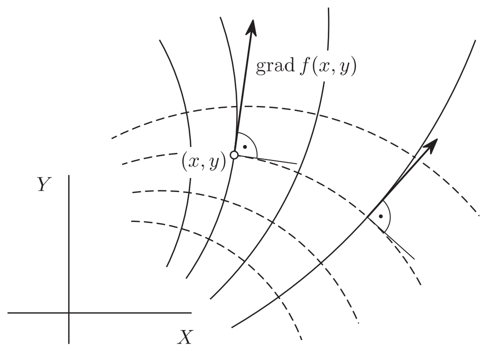

Abb 20.1 *Äquipotentiallinien (gestrichelt) und Gradienten (die Pfeile) einer Funktion f zweier Variable. Für jeden Punkt (x, y) ist der Gradient ein Vektor, der senkrecht auf der durch (x, y) verlaufenden Linie konstanten f steht, und der um so länger ist, je rascher sich f bei (x, y) ändert. Die durchgezogenen Kurven sind die Feldlinien des durch f bestimmten Gradientenfeldes.*

eines Ortsvektors. Sei also $f'(x') = f(x)$ die Darstellung des skalaren Feldes im gedrehten Koordinatensystem, und $(\partial f)' := \left(\frac{\partial f'}{\partial x^{i'}}\right)$ das Tripel (Zahlenzeile) der partiellen Ableitungen, ausgewertet am Punkt $\vec{x}$ (für die kompakte Formulierung greifen wir wieder auf die Notation (x^1, x^2, x^3) für (x, y, z) zurück). Unter Beachtung der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial f'}{\partial x^{i'}} \quad \text{bzw} \quad (\partial f) = (\partial f)' \underline{R} \tag{20.4}$$

worin $\underline{R} = (R^{i'}{}_i)$ orthogonale Matrix. Transposition der Matrixvariante liefert $(\mathrm{grad} f) = \underline{R}^T (\mathrm{grad} f)'$ (die Grads sind nun Spaltenvektoren!), von links mit $\underline{R}$ multiplizieren, $\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$ beachten ($\underline{R}$ ist schließlich orthogonal), liefert $(\mathrm{grad} f)' = \underline{R}(\mathrm{grad} f)$. Ein flüchtiger Blick auf (**??**) liefert die Erkenntnis: $\mathrm{grad} f$ transformiert wie ein Ortsvektor unter Drehungen – $\mathrm{grad} f(\vec{x})$ ist also Vektor!

Eine Abbildung, die jedem Punkt $\vec{x}$ des Raumes einen Vektor zuweist, nennt man ein Vektorfeld. Vektorfelder werden zur besseren Unterscheidung von Skalarfeldern mit einem Pfeil auf dem Kopf ausgestattet, etwa $\vec{F}(\vec{x})$ (oder $\vec{A}(\vec{x})$, oder $\vec{B}(\vec{x})$). LiebhaberInnen von Spaltenvektoren notieren dass dann

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F^X(x, y, z) \\ F^Y(x, y, z) \\ F^Z(x, y, z) \end{pmatrix} , \tag{20.5}$$

wo $F^X(x, y, z)$ etc. nun einfach reellwertige Funktionen dreier Variabler x, y, z, die sog. *Komponentenfunktionen* des Vektorfeldes $\vec{F}$. Alternativ kann man, um Platz zu sparen, ein Vektorfeld auch notieren $\vec{F}(\vec{x}) = F^X(x, y, z)\vec{e}_X + F^Y(x, y, z)\vec{e}_Y + F^Z(x, y, z)\vec{e}_Z$ bzw. mit Einsteins Summenkonvention $\vec{F} = \vec{e}_A F^A$ worin der Summationsindex $A = X, Y, Z$ (mit X, Y, Z werden räumliche Richtungen bezeichnet).

Achtung! So eine Komponentenfunktion wie beispielsweise $F^X(x, y, z)$ ist zwar genauso wie f eine reellwertige Funktion, ist aber keineswegs ein skalares Feld. Merke:

der Typ eines Feldes ist bestimmt durch sein Transformationsverhalten unter Kartenwechsel, und da unterscheiden sich F^X und f halt gewaltig.

Hat man nun irgendein skalares Feld $f(x, y, z)$, so liefert Gradientenbildung offensichtlich automatisch ein Vektorfeld. Kann man das umdrehen – ist jedes Vektorfeld das Gradientenfeld eines gewissen skalaren Feldes? Nein – nicht jedes Vektorfeld ist Gradientenfeld. Sofern man allerdings für ein gegebenes Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ eine Funktion $V(x, y, z)$ findet,dergestalt dass $\vec{F} = -\text{grad}V$ (das Vorzeichen ist Konvention) ist $\vec{F}$ mit Sicherheit ein Gradientenfeld, zuweilen geadelt "konservativ", und V ist sein sog. *Potential*.

Erinnern Sie sich an die Schulzeit? Die Arbeit, die Sie verrichten müssen, um einen Körper um eine Strecke $d\vec{r}$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$ zu verschieben, ist gegeben $dW = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, wobei $\vec{F}$ die Kraft, die ohne Sie auf den Körper wirkt. Die Gesamtarbeit, die sie aufbringen müssen, um den Körper längs $\vec{r}(\lambda)$ von 1 nach 2 zu verschieben, ist demnach

$$W_{12} = -\int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{20.6}$$

Sofern $\vec{F}$ Gradientenfeld eines Potentials V, $\vec{F} = -\text{grad}V$, ist die Verschiebearbeit von 1 nach 2 durch die Potentialdifferenz gegeben,

$$W_{12} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\,. \tag{20.7}$$

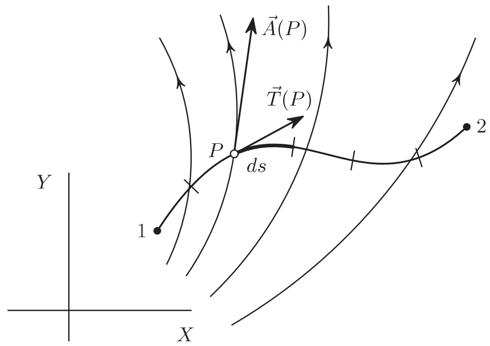

Abb 20.2 *Zum Kurvenintegral* $\int_1^2 \vec{A}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$. *Das vektorwertige Bogenelement* $d\vec{s} = ds\vec{T}(P)$, *wo ds das skalare Bogenmaß, und* $\vec{T}(P)$ *der Tangenteneinheitsvektor an die Kurve* $\vec{s}$ *im Punkt* P.

20.3 Aufgaben

▷ **Aufgabe 20-1** Sei $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen r^n und $\ln r$.

▷ **Aufgabe 20-2** Gegeben zwei skalare Funktionen (x, y, z) und $g(x, y, z)$. Beweisen Sie die Summen- und Produktregel der Gradientenrechnung,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(f+g) &= \mathrm{grad}f + \mathrm{grad}g\,, && (20.8) \\ \mathrm{grad}(fg) &= f\mathrm{grad}g + g\mathrm{grad}f\,. && (20.9) \end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 20-3**

Erinnern Sie sich an die Schulzeit? Die Arbeit, die Sie verrichten müssen, um einen Körper um eine Strecke $d\vec{r}$ zu verschieben, ist gegeben $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, wobei $\vec{F}$ die Kraft, die ohne Sie auf den Körper wirkt. Die Gesamtarbeit, die sie aufbringen müssen, um den Körper längs $\vec{r}(\lambda)$ 1 nach 2 zu verschieben, ist demnach

$$W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{20.10}$$

Zeigen Sie: Sofern $\vec{F}$ Gradientenfeld, $\vec{F} = -\mathrm{grad}V$, ist die Verschiebearbeit von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ wegunabhängig durch die Potentialdifferenz gegeben,

$$W_{12} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \tag{20.11}$$

