Kapitel 21

Divergenz und so

Beim Zeichnen von Vektorfelder – oder einfach beim Betrachten des Strömungsfeldes der Winde im Wetterbericht der Tagesschau – ist Ihnen möglicherweise schon aufgefallen, dass so ein Vektorfeld aus manchen Regionen heraus zu quellen scheint, in anderen verschwindet. Das Herausquellen bzw Verschwinden wird besonders deutlich, wenn Sie das elektrische Feld einer Punktladung zeichnen: das elektrische Feld hat offensichtlich seine Quelle im Ort einer positiven Ladung, und seine Senke im Ort einer negativen Ladung.

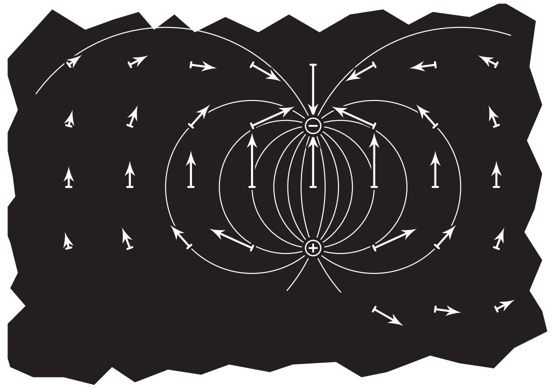

Abb 21.1 *Das Elektrostatische Feld $\vec{E}$ eines Diplos. Die positive Ladung ist Quelle, die negative Ladung ist Senke des Vektorfeldes $\vec{E}$.*

Wie stellt man für ein gegebenes Vektorfeld die Verteilung seiner Quellen fest? Indem man eine kleine Region betrachtet und nachschaut, wieviele Feldlinien aus der Region hinausführen, wieviele Feldlinien in die Region hineinführen, und die Differenz bildet. Die Quellstärke des Feldes in der betrachteten Region ist dann die Differenz "Raus weniger Rein". Ist "Raus" gleich "Rein" hat das Feld in der betrachteten Region keine Quellstärke.

"Raus" und "Rein" entscheiden sich über den Wert des Vektorfeldes auf der Oberfläche der betrachteten Region. Um "Raus" oder "Rein" zu messen, muss also erst mal der Begriff der Fläche mathematisch gefasst werden.

21.1 Flächen

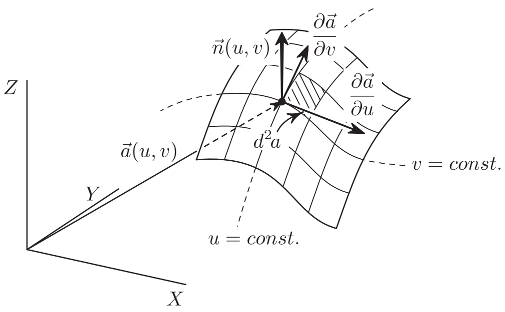

Abb 21.2 *Eine Fläche.*

Sie erinnern sich – um einen Punkt anzugeben bedarf es keines Parameters, um eine Kurve anzugeben bedarf es eines Paramaters – und um eine Fläche anzugeben? Bedarf es – zumindest in parametrisierter Form – zweier Parameter, gewöhnlich genannt u und v, so dass $(u,v) \mapsto \vec{a}(u,v)$ (wir verwenden kartesische Koordinaten wo Raumpunkte des Euklidischen Raumes der Physik durch Vektoren parametrisiert werden). Beispielsweise bestimmt $\vec{a}(u,v) = (u,v,1-u^2-v^2)^T$ mit Definitionsbereich $u^2+v^2 < 0.5$ eine "Kugelkappe".

Hat man eine paramterisierte Fläche – wie bestimmt man den Flächeninhalt? Indem man die Fläche in winzig kleine Teile unterteilt (so ein kleines Teil genannt Flächelchen), den Inhalt jeden Flächelchens bestimmt, und schließlich aufsummiert!

Ein Flächelchen ist bestimmt durch drei Punkte $\vec{a}(u,v)$ (koordinatenfrei der Punkt O), $\vec{a}(u+du,v)$ (koordinatenfrei P) und $\vec{a}(u,v+dv)$ (koordinatenfrei Q). Es ist, bis auf Terme höherer Ordnung,

$$\vec{a}(u+du,v) = \vec{a}(u,v) + \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial u} du\,, \tag{21.1}$$

$$\vec{a}(u,v+dv) = \vec{a}(u,v) + \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial v} dv\,, \tag{21.2}$$

kurz $\overrightarrow{OP} = \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial u} du$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial v} dv$. Die beiden Strecken definieren ein Parallelogramm (der dem Punkt O gegenüberliegende Punkt R mit Koordinaten $\vec{a}(u+du,v+dv) = \vec{a}(u,v) + \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial v} dv$). Algebraisch wird die Fläche des Parallelogramms (unser Flächelchen) beschrieben $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ bzw

$$d^2\vec{a} := \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{a}(u,v)}{\partial v}\, du\, dv \tag{21.3}$$

Der Betrag von $d^2\vec{a}$ gibt den Flächeninhalt unseres Flächelchens, die Richtung "senkrecht auf der durch $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ bestimmten Ebene" die Orientierung des Flächelchens im Raum. Man beachte, dass man grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Wahl einer Orientierung hat.

Eine endliche Fläche wird nun einfach durch Aneinanderlegen von Flächelchen aufgebaut. Flächen, die man auf diese Weise erhält heißen *reguläre Flächen*. Reguläre Flächen glänzen dadurch, dass in jedem ihrer Punkte eine Tangentialebene definiert werden kann (indem man einfach das Flächelchen im fraglischen Punkt aufbläst). Ist es obendrein möglich, die Orientierung der einzelnen Flächelchen für die ganze Fläche so zu wählen, dass sie sich an keiner Stelle aprupt ändern, heißt die Fläche *orientierbar*. Flächen, mit denen wir es im Folgenden zu tun haben, sind samt und sonders orientierbar. Ein kanonisches Gegenbeispiel vermittelt das *Möbiusband*.

Als Beispiel einer orientierbaren Fläche betrachten wir die Oberläche einer Kugel vom Radius a. Als Parametrisierung bieten sich Polar- und Azimuthwinkel an (ersetze in obigen Formeln $u \to \vartheta$, $v \to \varphi$)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi\sin\vartheta \\ a\sin\varphi\sin\vartheta \\ a\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{21.4}$$

Damit

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi\cos\vartheta \\ a\sin\varphi\cos\vartheta \\ -a\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\sin\vartheta \\ a\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21.5}$$

$$\frac{\partial\vec{a}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\vec{a}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} = a\sin\vartheta\vec{a}(\vartheta,\varphi) \Rightarrow d^2\vec{a} = \vec{e}_r(\vartheta,\varphi)a^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,. \tag{21.6}$$

worin $\vec{e}_r$ Einheitsvektor in radialer Richtung, $\vec{e}_r = a^{-1}\vec{a}$.

Die O'fl der Kugel ist ein typisches Beispiel einer *geschlossenen Fläche*. Eine solche Fläche zerlegt den Raum in zwei zusammenhängende Teile, das Innere und das Äußere. Die Konvention ist dann, dass so eine Oberfläche durch ein nach außen weisendes Einheitsnormalenvektorfeld orientiert wird.

Die Deckelfläche eines Zylinders, aber auch seine Mantelfläche vermitteln Beispiele für eine sog. *offene Fläche*. Solche Flächen haben einen Rand. Bei einer Fläche mit Rand wird durch die Orientierung der Fläche ein Durchlaufsinn der Randkurve, genannt ihre Orientierung, festgelegt. Konventionell wählt man die "Rechte-Hand-Regel": Daumen der rechten Hand in Richtung Flächennormale, dann schlappt die Resthand in Richtung Durchlaufsinn der Randkurve.

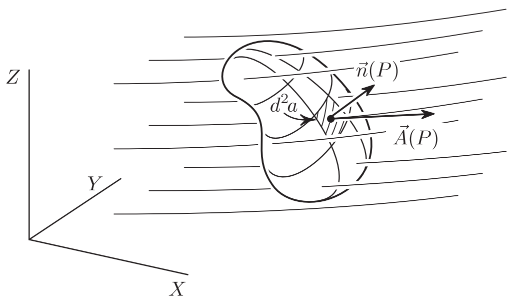

Abb 21.3 *Zum Oberflächenintegral.*

21.2 Fluss und Divergenz

Hat man ein Vektorfeld $\vec{A}$ und eine orientierte Fläche Σ, nennt man das Integral

$$\Phi_\Sigma := \iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{a} \tag{21.7}$$

den *(Vektor-)Fluss* (von $\vec{A}$ durch Σ). Die Namensgebung erflogt in Anlehnung an die Vorstellung, entlang der Feldlinien von $\vec{A}$ fließe etwas. Der magnetische Fluss im Faradayschen Induktionsgesetz, beispielsweise, ist ein Vektorfluss.

Ist dann die Fläche in () die Oberflches eines Volumens V, bezeichnet ∂V, wäre ein nichtverschwindender Fluss durch ∂V durch Feld-Quellen in V zu erklären. Die entsprechende

Sei Q_ε ein Quader mit Mittelpunkt in $\vec{x}$, Kantenlängen $\varepsilon a, \varepsilon b, \varepsilon c$, und entsprechendem Volumen $V_\varepsilon = \varepsilon^3 abc$. Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}$ im Punkt $\vec{x} = (x, y, z)^T$ ist dann erklärt

$$\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{\partial V_\varepsilon} \vec{A}\cdot d^2\vec{a} \tag{21.8}$$

wobei mit ∂V_ε die Oberfläche des Quaders gemeint ist. Das sieht nun umständlich aus, aber wir zeigen jetzt, dass sich die Divergenz ganz einfach berechnen lässt

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_3(x,y,z)}{\partial z}\,. \tag{21.9}$$

Da die Definition () auf dem Skalarprodukt beruht ist $\mathrm{div}\vec{A}$ ein skalares Feld, zuweilen genannt das *Quellenfeld* von $\vec{A}$. Der Wert des Quellenfeldes in einem bestimmten Punkt heißt dann die *Quellstärke* von $\vec{A}$ in diesem Punkt.

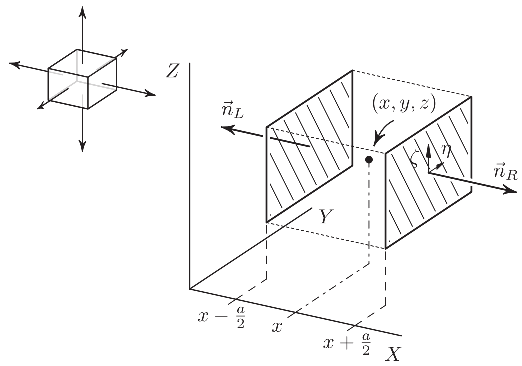

Abb 21.4 *Bezeichnungen zu Gl. (??).*

Das Flächenintegral () kann als Summe dreier Beiträge geschrieben werden, jeder Beitrag besteht aus einem Paar von Intgralen über jeweils gegenüberliegende Seiten des Quaders,

$$\iint_{\partial V_\varepsilon} \vec{A}\cdot d^2\vec{a} = \left\{ \iint_{L\&R} + \iint_{V\&H} + \iint_{O\&U} \right) \vec{A}\cdot d^2\vec{a}\,. \tag{21.10}$$

Wir nehmen uns mal das Paar "links & rechts" ($L\&R$) vor, also Flächennormaleneinheitsvektor rechts $\vec{e}_1$, links $-\vec{e}_1$. Fürderhin $A_1 := \vec{e}_1 \cdot \vec{A}$, die Komponente von $\vec{A}$ in 1-Richtung. Damit

$$\iint_{L\&R} \vec{A}\cdot d^2\vec{a} = \iint d\eta d\zeta A_1(x+\varepsilon\frac{a}{2}, y+\eta, z+\zeta) - \iint d\eta d\zeta A_1(x-\varepsilon\frac{a}{2}, y+\eta, z+\zeta) \tag{21.11}$$

mit Minuszeichen wegen $\vec{e}_1|_L = -\vec{e}_1|_R$. In den verbleibenden Integralen ist die Funktion A_1 bei jeweils festen Werten der ersten Koordinate, links an der Stelle $x - \varepsilon\frac{a}{2}$, rechts an der Stelle $x + \varepsilon\frac{a}{2}$, über die zweite und dritte Koordinate zu führen. Taylorentwicklung um x liefert

$$A_1(x \pm \frac{\varepsilon a}{2}, y, z) = A_1(x, y, z)dydz \pm \frac{\partial A_1(x, y, z)}{\partial x}\frac{\varepsilon a}{2} + \ldots \tag{21.12}$$

wobei ... Beiträge der Ordnung ε^2. Eingesetzt in () schaut man in führender Ordnung in ε auf $\iint\limits_{L\&R} \vec{A} \cdot d^2\vec{a} = \varepsilon a \iint d\eta d\zeta \frac{\partial A_1}{\partial x}$. Taylorentwicklung des Integranden kann bereits in 0ter Ordnung abgebrochen werden,

$$\iint\limits_{L\&R} \vec{A} \cdot \vec{a} = \varepsilon^3 abc\frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\varepsilon^4) \tag{21.13}$$

Nach Division durch V_ε und Limesbildung $\varepsilon \to 0$ erhält man () wie versprochen.

Die Divergenz ist ein Differentialoperator. Es gelten die Regeln

$$\mathrm{div}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{div}\vec{B} \tag{21.14}$$

$$\mathrm{div}\left(c\vec{A}\right) = c\,\mathrm{div}\vec{A} \tag{21.15}$$

$$\mathrm{div}\left(\phi\vec{A}\right) = \phi\,\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \mathrm{grad}\phi \tag{21.16}$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt.

21.3 Aufgaben

▷ **Aufgabe 21-1**

Für einen Zylider (Höhe h Zylinderradius a) dessen Achse mit der z-Achse zusammenfalle, gebe man unter Verwendung von Zylinderkoordinaten die Mantelfläche, Boden- und Deckelfläche in parametrisierter Form und bestimme die jeweiligen Flächendifferentiale.

▷ Aufgabe 21-2

Gegeben ein Feld $\vec{D}(x,y,z) = \frac{\gamma}{\rho}\vec{e}_\rho$ worin $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\vec{e}_\rho = \frac{x}{\rho}\vec{e}_x + \frac{y}{\rho}\vec{e}_y$. Berechnen Sie den Vektorfluss von $\vec{D}$ durch die in Aufgabe 21-1 angegebene Zylinderfläche.

▷ Aufgabe 21-3

Für das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \vec{x}$ (Skizze?) berechne man die Divergenz div$\vec{A}$.

▷ Aufgabe 21-4

Sei $\vec{a}$ fester Vektor. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \vec{a}\times\vec{x}$, berechnen Sie sein Quellenfeld div$\vec{A}$ und machen sich davon ein Bild.

▷ Aufgabe 21-5

Sei $\vec{a}$ fester Vektor und $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = r\vec{a}$, berechnen Sie sein Quellenfeld div$\vec{A}$ und machen sich davon ein Bild.

▷ Aufgabe 21-6

Gegeben das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \frac{\vec{x}}{r}$ worin $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Skizzieren Sie $\vec{A}$, berechnen Sie sein Quellenfeld, das dazugehörige Gradientenfeld und machen Sie sich von beiden Feldern ein Bild.

▷ Aufgabe 21-7

Für die skalaren Felder $\phi = \sin(\vec{k}\cdot\vec{x})$ und $\phi = e^{-k|\vec{x}|}$ berechne man die entsprechenden Gradientenfelder und deren Quellenfelder.

▷ Aufgabe 21-8

Welchen Bedingungen hat die Funktion $f(r)$ zu genügen, damit das Vektorfeld $\vec{A} = f(r)\vec{x}$ quellenfrei?