# Kapitel 22

# Rotation und so

Hat man ein Vektorfeld $\vec{A}$ und eine geschlossene Kurve $\gamma$, nennt man das Integral

$$U_\gamma = \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{22.1}$$

die *Zirkualation* von $\vec{A}$ längs $\gamma$. Die Zirkulation misst soetwas wie die Wirbeligkeit eines Vektorfeldes.[1]

Sei $F_\varepsilon$ ein Rechteckfläche mit Mittelpunkt in $\vec{x}$, Orientierung $\vec{n}$, Seitenlängen $\varepsilon a, \varepsilon b$, entsprechendem Flächeninhalt $F_\varepsilon = \varepsilon^2 ab$. Die Rotation eine Vektorfeldes $\vec{A}$ im Punkt $\vec{x} = (x, y, z)^T$ ist dann erklärt

$$\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(x, y, z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{F_\varepsilon} \oint_{\partial F_\varepsilon} \vec{A} \cdot d\vec{s}, \tag{22.2}$$

[1] In der Elektrodynamik heißt die Zirkulation des elektrischen Feldes seine *Ringspannung*.

wobei mit $\partial F_\varepsilon$ die Randkurve von $F_\varepsilon$ gemeint ist. Das sieht kompliziert aus, aber wir zeigen gleich

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial y} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix} . \tag{22.3}$$

Per Konstruktion ist rot$\vec{A}$ ein Vektorfeld, genannt das *Wirbelfeld* von $\vec{A}$, der Wert in einem bestimmten Punkt genannt die *Wirbelstärke* von $\vec{A}$ in diesem Punkt.

Wir legen $F_\varepsilon$ parallel zur $XY$-Ebene auf Höhe $z$, d.h. $\vec{n} = \vec{e}_3$, und also Berechnung von $(\text{rot}\vec{A})_3 \equiv \vec{e}_3 \cdot \text{rot}\vec{A}$. Das Konturintegral () ist dann Summe von gewöhnlichen Integralen,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial F_\varepsilon} \vec{A} \cdot d\vec{s} = & \quad \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} A_1(x+\xi, y-\varepsilon\frac{b}{2}, z) d\xi - \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} A_1(x+\xi, y+\varepsilon\frac{b}{2}, z) d\xi \\
& + \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} A_2(x-\varepsilon\frac{a}{2}, y+\eta, z) d\eta - \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} A_2(x+\varepsilon\frac{a}{2}, y+\eta, z) d\eta \\
= & \quad -\varepsilon b \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} \frac{\partial A_1(x+\xi, y, z)}{\partial y} d\xi + \varepsilon a \int_{-\varepsilon\frac{a}{2}}^{\varepsilon\frac{a}{2}} \frac{\partial A_2(x, y+\eta, z)}{\partial x} d\eta + O(\varepsilon^2) \\
= & \quad -\varepsilon^2 ab \frac{\partial A_1(x,y,z)}{\partial y} + \varepsilon^2 ab \frac{\partial A_2(x,y,z)}{\partial x} + O(\varepsilon^3) \,.
\end{aligned} \tag{22.4}$$

Nach Division durch den Flächeninhalt, im Limes $\varepsilon \to 0$

$$(\text{rot}\vec{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial (A_1}{\partial y} \,, \tag{22.5}$$

wie versprochen. Das kann auf die verbleibenden Richtungen leicht übertragen werden, womit () bewiesen wäre.

Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\vec{A}+\vec{B}\right) &= \mathrm{rot}\vec{A}+\mathrm{rot}\vec{B}\,, && (22.6)\\
\mathrm{rot}c\vec{A} &= c\,\mathrm{rot}\vec{A} && (22.7)\\
\mathrm{rot}\left(\phi\vec{A}\right) &= \phi\,\mathrm{rot}\vec{A}+(\mathrm{grad}\phi)\times\vec{A} && (22.8)
\end{aligned}$$

Nützliche Merksätze, die man durch Nachrechnen leicht beweist, sind:

- Gradientenfelder sind wirbelfrei,

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\phi)=0 \qquad (22.9)$$

- Wirbelfelder sind quellfrei,

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)=0 \qquad (22.10)$$

Ebenso nützlich die Konsequenzen

- ist $\vec{A}$ wirbelfrei, $\mathrm{rot}\vec{A}=0$, dann ist $\vec{A}$ Gradientenfeld, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\phi$, so dass $\vec{A}=\mathrm{grad}\phi$.
- ist $\vec{B}$ quellfrei, $\mathrm{div}\vec{B}=0$, dann ist $\vec{B}$ Wirbelfeld, d.h. es gibt ein Vektorfeld $\vec{A}$ so dass $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$.

Im Kontext der Elektrodynamk, beispielsweise, ist das elektrostatische Feld $\vec{E}$ wirbelfrei, und das Skalarfeld $\phi$ in $\vec{E}=-\mathrm{grad}\phi$ (Vorzeichen ist Konvention) ist das sog. *Potential*. Fürderhin ist das Magnetfeld $\vec{B}$ quellfrei, $\mathrm{div}\vec{B}=0$, und das Vektorfeld in $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$ ist das sog. *Vektorpotential*.

## 22.1 Div Grad Rot und der Vektordifferentialoperator $\vec{\nabla}$

Im Zusammenhang mit Gleichung () wurde schon herausgeareitet, dass die partiellen Ableitungen nach kartesischen Koordinaten sich unter Drehungen des Koordinatensystems wie die Koordinaten eines Vektors transformieren.

Auf den Spuren Maxwells führt man einen vektor-wertigen Differentialoperator ein,

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_X \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_Y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_Z \frac{\partial}{\partial z} \tag{22.11}$$

von William Robertson Smith getauft *Nabla*, nach der Bezechnung für eine antike Harfe.

Unter Verwendung der üblichen Regeln der Vektorrechdnung das Skalar- und Kreuzprodukt betreffend, lassen sich Gradient, Divergenz und Rotation notieren

$$\begin{array}{rcll} \vec{\nabla}\phi & \equiv & \mathrm{grad}\phi & \quad\text{Vektor} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} & \equiv & \mathrm{div}\vec{A} & \quad\text{Skalar} \\ \vec{\nabla}\times\vec{A} & \equiv & \mathrm{rot}\vec{A} & \quad\text{Vektor} \end{array} \tag{22.12}$$

Nabla ist einerseits Vektor, andererseits Differentialoperator – also "Hungry for something to differentiate" (James Jeans). Man kann alos Nabla wie einen Vektor behandeln – aber nur fast. Insbesonder ist $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}$ nicht Null, wie es für gewöhnliche Vektoren der Fall wäre, sonderen

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \tag{22.13}$$

worin

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{22.14}$$

der sog. *Laplaceoperator*.

## 22.2 Aufgaben

### ▷ Aufgabe 22-1

Gegeben zwei Vektorfelder $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e}_X + y\vec{e}_Y$ und $\vec{B}(x,y,z) = -y\vec{e}_X + x\vec{e}_Y$.

(a) Skizzieren Sie die beiden Vektorfelder.

(b) Bestimmen Sie die Quellen- und Wirbelfelder der beiden Vektorfelder, und machen Sie sich davon jeweils ein Bild.

(c) Gegeben eine ebene geschlossene Kurve $\gamma$ deren Spur in der $XY$-Ebene gelegen ein Quadrat mit Mittelpunkt im Ursprung und Seitenlänge $a$. Berechnen Sie jeweils die Zirkulation der beiden Vektorfelder. Was erhalten Sie im Falle einer kreisförmigen Spur (Mittelpunkt im Ursprung, Radius $a$)?

### ▷ Aufgabe 22-2

Sei $\vec{a}$ fester Vektor. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \vec{a} \times \vec{x}$, berechnen Sie sein Wirbelfeld rot$\vec{A}$ und machen sich davon ein Bild. Kombinieren Sie Ihre Lösung mit der Lösung aus Aufgabe 21-4.

### ▷ Aufgabe 22-3

Sei $\vec{a}$ fester Vektor und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = r\vec{a}$, berechnen Sie sein Wirbelfeld rot$\vec{A}$ und machen sich davon ein Bild. Kombinieren Sie Ihre Lösung mit der Lösung aus Aufgabe 21-5.

### ▷ Aufgabe 22-4

Für das Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z) = \vec{x}$ zeigen man die Wirbelfreiheit, rot$\vec{A} = 0$. Wirbelfreiheit bedeutet, dass $\vec{A}$ eine Darstellung als Gradientenfeld gestattet, $\vec{A} = \phi$. Konstruieren Sie $\phi$.

### ▷ Aufgabe 22-5

Beweisen Sie die Identität $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

### ▷ Aufgabe 22-6

Berechenen Sie das Quellenfeld und das Wirbelfeld des Vektorfeldes $\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\phi\right) \times \left(\vec{\nabla}\psi\right)$.

### ▷ Aufgabe 22-7

Seien $\vec{A}$ und $\vec{B}$ quellen- und wirbelfreie Vektorfelder. Welche Quellen und welche Wirbel hat das Vektorfeld $\vec{A} \times \vec{B}$?

 