Kapitel 23

Integralsätze der Vektoranalysis

23.1 Satz von Gauss

Legt man zwei Quader nebeneiander, so dass die rechte Seite des linken Quaders mit der linken Seite des rechten Quaders zusammenfällt, lässt sich das O'flintegral über den Kombiquader als Summe von O'flintegralen über die Einzelquader schreiben: die Beiträge der Berührfläche kompensieren sich exakt zu Null. Aus Gl. () folgt $\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z)dV = \iint_{\partial dV} \vec{A}\cdot d^2\vec{a}$, und mit einer etwas hemdsärmligen Integration (=Summe) über die differentiellen Volümchen

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{A}dV = \iint\limits_{\partial V} \vec{A}\cdot d^2\vec{a} \tag{23.1}$$

sog *Gauss'scher Satz*.

Der Gaussche Satz wird insbesondere in der Elektrodynamik häufig gebraucht. Beispielsweise lautet das Gauss'sche Gesetz – nicht zu verwechseln mit dem Gauss'schen Satz – in differentieller From

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{23.2}$$

worin $\vec{D}$ die elektrische Flussdichte[1] und ρ die Ladungsdichte. Nimmt man nun irgendein Gebiet V, ist die in V enthaltene Ladung definitionsgemäß

$$Q_V = \iiint\limits_V \rho dV \,, \tag{23.3}$$

und unter Verwendung des Gauss'schen Satzes erhält man aus () das Gauss'sche Gesetz in integraler Form.

$$Q_V = \iint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} \,. \tag{23.4}$$

Diese Form ist nützlich, wenn die Ladungsverteilung – and also auch die von ihr erzeugte elektrische Flussdichte – hohe Symmetrie aufweist …

23.2 Satz von Stokes

Für eine kleine, ebene Fläche $\Delta\vec{\Sigma}_1$, mit Mittelpunkt bei $\vec{x}_1$ und Randkurve $\Delta\Sigma_1$ liest man aus () ab

$$\oint_{\Delta\Sigma_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \overrightarrow{\Delta\Sigma}_1 \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x}_1) + \ldots \tag{23.5}$$

worin … ein kleiner Rest. Hat man nun bei einem benachbarten Aufpunkt $\vec{x}_2$ eine weitere kleine Fläche deren Randkurve teilweise mit γ_1 zusammenfällt, ist das

[1]Eleketrische Flussdichte $\vec{D}$ und elektrische Feldstärke $\vec{E}$ sind in linearen Medien proportional, im Vakuum $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ mit der Faraday'schen Influenzkonstante ϵ_0.

Wegintegral über die Kombifigur gleich der Summe der beiden einzelnen Wegintegrale – die Beiträge auf der Berührseite heben sich gegenseitig auf. So kann man weitermachen, und landet schließlich beim

Stokesscher Satz Sei $\vec{A}$ stetig differenzierbares Vektorfeld mit Definitionsberich D, $\partial\Sigma$ eine in D verlaufende, glatte und geschlossene Kurve mit Umlaufsinn, und Σ eine über $\partial\Sigma$ gespannte, ganz in D liegende, reguläre und orientierbare Fläche, dann gilt

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) \cdot d^2\vec{a} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{23.6}$$

wobei die Orientierung von Σ durch den Umlaufsinn von $\partial\Sigma$ gegeben ist (Rechte-Hand Regel).

Der Stokes'sche Satz wird unter anderem in der Elektrodnymaik gerne gebraucht. Die Grundgleichung der Magnetostatik, beispielsweise, lautet

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{23.7}$$

worin $\vec{H}$ das *magnetische Feld*, und $\vec{j}$ die elektrische Stromdichte. Der Stokes'sche Satz liefert

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{a} \equiv I_\Sigma \tag{23.8}$$

mit I_Σ der durch die Fläche Σ fließende Strom.

Die Voraussetzungen sind hier unbedingt zu beachten: sowohl $\partial\Sigma$ als auch Σ müssen vollständig im Definitionsberich von $\vec{A}$ liegen. Ist das nicht der Fall, ist Stokes nicht zuständig bzw nicht anwendbar.

Als Beispiel das Magnetfeld $\vec{H}$ eines geraden, vom Strom I durchflossenen unendlich dünnen Drahtes – sog. *Stromfaden*. Außerhalb des Drahtes ist

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi}\frac{\vec{e}_\varphi}{\varrho}, \quad \varrho > 0 \tag{23.9}$$

worin $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ der axiale Abstand, und $\vec{e}_\varphi = \frac{-y}{\varrho}\vec{e}_X + \frac{x}{\varrho}\vec{e}_Y$ der azimuthale Einheitsvektor. Definitionsberich von $\vec{H}$ ist $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$ (der $\mathbb{R}^3$ "ohne die Z-Achse). Auf ganz D gilt rot$\vec{H} = 0$, und für Wege die den Stromfaden nicht umschließen gilt in der Tat $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$, aber für einen Weg, der den Draht einmal umschlingt $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$. Jede von einem solchen Weg umspannte Fläche wird notwendig vom Draht durchstochen, und dort ist $\vec{H}$ halt nicht definiert.

Defintion Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn für je zwei Punkte aus G ein ganz in G verlaufender Weg γ exisitert, und jeder andere solcher Weg γ' durch stetige Verformung in in γ überführt werden kann, ohne G zu verlassen.

Äquivalent: geschlossene Wege lassen sich auf einen Punkt zusammenziehen ohne dabei G zu verlassen.

In dem obigen Beispiel gibt es zwei Klassen von Wegen – solche die den Draht mindestens einmal umfassen, und solche die ihn nicht umfassen. Innerhalb einer Klasse lassen sich die Wege ineinander überführen, ohne D zu verlassen. Aber Wege aus der einen Klasse lassen sich nicht in Wege aus der anderen Klasse überführen, ohne D zu verlassen. Das Gebiet D ist also nicht einfach, sondern vielmehr zweifach zusammenhängend.[2]

[2]Entfernt man aus dem $\mathbb{R}^3$ insgesamt n Fäden, ist das verbleibende Gebiet 2^n-fach zusammenhängend.

Satz Sei G irgendein zusammenhängendes Gebiet (nicht notwendig einfach zusammenhängend), 1 und 2 zwei Punkte in G, und γ irgendein ganz in G verlaufender Weg; dann gilt

$$\int_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{s} \text{ wegunabhängig } \Leftrightarrow \oint \vec{A}\cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \text{ Gradientenfeld } \Rightarrow \mathrm{rot}\vec{A} = 0\,. \tag{23.10}$$

Ist obendrein G einfach zusammenhängend gilt darüber hinaus

$$\vec{A} \text{ Gradientenfeld } \Leftrightarrow \mathrm{rot}\vec{A} = 0\,, \tag{23.11}$$

d.h. in diesem Falle ist Rotatinsfreieheit notwendig und hinreichend für Wegunabhängigkeit.

Sei $\vec{A}$ VF mit $\int \vec{A}\cdot d\vec{s}$ wegunabhängig. Dann ist $\vec{A}$ Gradientenfeld. Beweis: Seien γ_1 und γ_2 zwei Wege von $\vec{x}_a$ nach $\vec{x}$, und sei $\phi(\vec{x})$ der wegunabhängige Wert von $\int \vec{A}\cdot d\vec{s}$. Studiere $\phi(\vec{x}+\Delta\vec{x})-\phi(\vec{x})$, via Mittelwertsatz $=\vec{A}(\vec{x}'')\Delta\vec{x}$, im Limes $\Delta\vec{x}\to d\vec{x}$ wird $\vec{A}(\vec{x}'') \to \vec{A}(\vec{x})$. Linke Seite $\to d\phi = \mathrm{grad}\phi\cdot d\vec{x}$; rechte Seite $\vec{A}\cdot d\vec{x}$; Vergleich $\vec{A} = \mathrm{grad}\phi$, qed. Wenn andererseits $\vec{A}$ Gradientenfeld, dann Wert des Integrals nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig, also wegunabhängig.

Signifikanz? In der Mechanik heißt ein Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z)$, für das die Verschiebearbeit $-\int \vec{F}\cdot d\vec{s}$ wegunabhängig nur vom Anfangs- und Enpunkt abhängt, *konservativ*. Für konservative Kraftfelder lässt sich ein Energieerhaltungssatz herleiten:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \Rightarrow m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} \equiv \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{d}{dt}V(\vec{r}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})\right) = 0 \tag{23.12}$$

worin $V(\vec{r})$, die sog. *potentielle Energie*, das Potential des Kraftfeldes, $\vec{F} = -\mathrm{grad}V$.

23.3 Aufgaben

▷ **Aufgabe 23-1** Die Größe $\iint\limits_{\Sigma} \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) \cdot d\vec{a}$ heißt der *Wirbelfluss* von $\vec{A}$ durch die Fläche Σ. Offensichtlich gilt: der Wirbelfluss durch eine geschlossene Fläche ist null. Beweis 1 (mit Gauss'schem Satz): $\iint\limits_{\partial V} = \iiint\limits_{V} \mathrm{divrot}\vec{A}dV = \iiint\limits_{V} 0dV = 0$. Beweis 2 (mit Stokesschem Satz): als Fläche nehme man einen Beutel, dessen Öffnung – die Randkurve – man durch Zusammenziehen schließt. Die Randkurve wird dabei auf einen Punkt zusammengezogen, hat die Länge null, daher $\partial\Sigma = \emptyset$, entsprechend $\int_{\partial\Sigma} \vec{A}d\vec{s} = 0$, angesichts Stokes $\iint_{\Sigma} \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) d^2\vec{a} = 0$. Konsequenz? Ganz einfach: der Wirbelfluss hängt nicht von der konkreten Form der Fläche ab, sondern nur von der Randkurve!

