Kapitel 24

Partielle Differentialgleichungen

24.1 Differentialgleichungen und Lokalitätsprinzip

Viele Naturgesetze werden in Form von Differentialgleichungen formuliert, denken Sie nur an die gewöhnlichen Differentialgleichunge (DGL) aus dem Wintersemester, die die Punktmechanik regieren, oder die partiellen Differentialgleichungen (PDGL), die Sie in den Experimentalphysikvorlesungen zur Elektrodynamik gesehen haben. Die Vorherrschaft der Differentialgleichungen beruht auf einem wichtigen physikalischen Prinzip, dem **Lokalitätsprinzip**. Nach diesem Prinzip ist das “Hier und Jetzt” bereits vollständig durch die Verhältnisse der nahen Umgebung in der unmittelbaren Vergangenheit bestimmt. Diese Prinzip erst macht es möglich, von einem Teilchen, allgemeiner einem “System” zu reden, und Naturgesetze zu formulieren.

Betrachten wir zur Illustration ein Punktteilchen in einer räumlichen Dimension, das sich unter dem Einfluss einer konservativen Kraft F bewegt. Die **Hamilton'schen Bewegungsgleichunge**

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \tag{24.1}$$

$$\dot{p} = F(q). \tag{24.2}$$

werden gelöst

$$q(t) = q(t-\Delta t) + \frac{p(t-\Delta t)}{m}\Delta t \tag{24.3}$$

$$p(t) = p(t-\Delta t) + F(q(t-\Delta t))\Delta t \tag{24.4}$$

Offensichtlich wird der **Zustand jetzt**, charakterisiert durch das Paar $(p(t), q(t))$, vom Zustand $(p(t-\Delta t), q(t-\Delta))$ und den lokalen Bedingungen $(p/m, F(q))$ der unmittelbaren Vergangenheit vollständig bestimmt.

Die Felder, die Sie in der Experimentalphysik kennengelernt haben, sind Systeme mit "unendlich vielen Freiheitsgraden": an jedem Raumpunkt (x, y, z) befindet sich zu jedem Zeitpunkt t ein "elektrischer (Vektor)" $\vec{E}(x, y, z, t)$ oder ähnliches, und die Bewegungsgleichungen werden zu partiellen Differentialgleichungen (PDGL). Ein schönes Beispiel vermittelt die **(homogene) Wellengleichung** der das elektrische Potential im Vakuum genügt,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x, y, z, t) - \Delta\phi(x, y, z, t) = 0 \tag{24.5}$$

Auch hier lässt sich das Lokalitätsprinzip ablesen. Der "Zustand" des Feldes ist, zu jedem Zeitpunkt t, durch Angabe zweier Felder bestimmt, nämlich $\phi(x, y, z, t)$ und $\pi(x, y, z, t) := \frac{\partial}{\partial t}\phi(x, y, z, t)$. Gemäß Wellengleichung sind die Feldwerte von ϕ und π "Jetzt und Hier" vollständig bestimmt durch die Feldwerte der unmittelbaren Nachbarschaft in der unmittelbare Vergangenheit $t - \Delta t$ (man beachte, dass $\Delta\phi$ so etwas wie die "Krümmung" der Potentialfunktion ϕ beschreibt – und das ist eine lokale Größe ...).

24.2 Ein Zoo von partiellen Differentialgleichungen

Andere Beispiele von partiellen Differentialgleichungen sind, neben der homogenen Wellengleichung

INHOMOGENE WELLENGLEICHUNG $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} - \Delta\phi(x,t) = j(x,t) \tag{24.6}$$

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa\Delta T(x,t) \tag{24.7}$$

SCHRÖDINGERGLEICHUNG $$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t) + V(v)\Psi(x,t) \tag{24.8}$$

KLEIN-GORDON GLEICHUNG $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} - \Delta\Psi(x,t) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi(x,t) = 0 \tag{24.9}$$

KORTEWEG-DEVRIES GLEICHUNG $$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} = 0\,. \tag{24.10}$$

Jede dieser Gleichungen hat i.A. unendlich viele Lösungen. Erst durch Vorgabe von Nebenbedingungen, meist in Form sog Rand- und Anfangswerte, wird die Lösung eindeutig bestimmt. Im Rahmen der Theorie partieller Differentialgleichungen wird geklärt (i) unter welchen Bedingungen eine eindeutige Lösung existiert, und (ii) wie man diese Lösung methodisch findet.

Die PDGL ()–() sind vom Typ "linear homogen", die PDGL () vom Typ "linear inhomogen", und die PDGL () ist schlicht nichtlinear. Von wenigen Ausnahmen abgesehen sind nichtlilneare PDGL schwierig bis unmöglich zu lösen (man ist auf Näherungsverfahren angewiesen). Hier konzentrieren wir uns zunächst auf die linearen homogenen PDGL.

Linearität bedeutet dabei, dass mit ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen ist auch die Summe $\alpha\phi_1 +$

$\beta\phi_2$ Lösung. In der Physik heißt diese das **Superpositionsprinzip**. Das Superpsotionsprinzip spielt eine hervorragende Rolle in der Elektrodynamik, der Wellenoptik, aber auch der Quantenmechanik.

24.3 1D Wellengleichung (Schwingende Saite o.ä)

Wir betrachten eine Saite mit linearer Massendichte μ (Masse pro Länge), die entlang der X-Achse ausgelegt ist, und unter Spannung T gehalten wird. Kleine transversale Auslenkungen $y(x,t)$ der Saite genügen der 1D **Wellengleichung**,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0\,. \tag{24.11}$$

worin $c = \sqrt{T/\mu}$ eine charakteristische Geschwindigkeit.

Durch einfaches Nachrechnen bestätigt man umstandslos, dass

$$y(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct) \tag{24.12}$$

für beliebige Funktionen g, h eine Lösung von (24.11).[1]

[1] Der hier auftretende Differentialoperator lässt sich faktorisieren

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{24.13}$$

Jede Funktion $f(x-ct)$, die der PDGL $\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] f = 0$ genügt, ist auch Lösung der Wellengleichung (24.11). Und auch jede Funktion $g(x+ct)$, die der PDGL $\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right] y_1(x,t)$, ist Lösung der Wellengleichung (24.11). Und da die Wellengleichung eine lineare Gleichung, ist die allgemeine Lösung von der Form (24.12).

Die Funktion g beschreibt einen nach rechts laufenden Puls, durch h wird eine nach links laufender Puls beschrieben. Charakteristische für die Wellengleichung ist, dass die beiden Pulse g und h ihre jeweilige Form im Laufe der Zeit beibehalten.

Eine vollständige Charakterisierung der physikalischen Sachlage impliziert gewisse Einschränkungen, denen die Lösungen genügen müssen. Man unterscheidet **Randbedingungen**

(a) Die Saite ist bei $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannt,

$$y(x = 0, t) = y(x = l, t) = 0\,, \tag{24.14}$$

sog **Einspannbedingung**.

(b) Die Saite ist bei $x = 0$ fest eingespannt, aber bei $x = l$ **offen**, d.h. transversal frei beweglich und kräftefrei,

$$y(x = 0, t) = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\,. \tag{24.15}$$

(c) Die Saite ist an beiden Enden "offen"

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}\,. \tag{24.16}$$

(d) Keinerlei Einschränkungen (lediglich gewisse Einschränkungen "im Unendlichen")

Im Verbund mit den Randbedingungen erhält man eine eindeutige Lösung durch Vorgabe sog **Anfangsbedingungen**. Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien beispielsweise die Auslenkung und die Schnelle gegeben,

$$y(x, t = 0) = f(x) + g(x)\,, \qquad \dot{y}(x, t = 0) = -cg' + ch'\,, \tag{24.17}$$

wo der Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Für die gezupfte Saite, beispielsweise, $\dot{y}(x, t = 0) = 0$, und $y(x, t = 0)$ eine "Zeltfunktion".

Gesucht ist diejenige Funktion $y(x, t)$ welche (i) die Schwingungsgleichung (24.11) unter einer der Randbedingungen (24.14–24.16) erfüllt, und (ii) den Anfangsbedingungen (24.17) genügt.

Apriori ist hier nicht klar, ob eine solche Funktion überhaupt existiert, oder ob es gar mehrere Funktionen gibt die diese Aufgabe lösen. Die Theorie der PDGL sichert nun aber die Existenz und Eindeutigkeit, so dass wir uns hier auf die Konstruktion der Lösung konzentrieren können.

Wir ignorieren zunächst das Anfangswertproblem (AWP) und suchen Lösungen, die lediglich der Randbedingung genügen. Aus diesen Lösungen bilden wir im zweiten Schritt geeignete Linearkombinationen so dass schließlich nicht nur die Rand- sondern auch die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

24.4 Trennung der Variable

Wir konzentrieren uns hier auf das Randwertproblem der beidseitig eingesapnnten Saite, (24.14). Wir benutzen einen sog **Separationsansatz** $y(x, t) = \phi(x)\chi(t)$, auch genannt **Trennung der Variable**. Einsetzen in die Wellengleichung (24.11) führt zunächst auf $c^{-2}\phi\ddot{\chi} - \chi\phi'' = 0$. Nach Division durch y erhält man $c^{-2}\frac{\ddot{\chi}(t)}{\chi(t)} - \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = 0$. Der erste Summand ist hier eine Funktion von t, der zweite eine Funktion von x. Subtrahiert soll das Null sein, was nur geht wenn beide Summanden bis auf das Vorzeichen die gleiche Konstante λ sog **Separationskonstante**. Schematisch

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$y(x=0,t) = y(x=l,t) = 0$$

$y(x,t) = \phi(x)\chi(t)$ Separationsansatz

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$$

$$\phi(x=0) = \phi(x=l) = 0$$

$$\ddot{\chi}(t) + c^2\lambda\chi(t) = 0$$

$$\lambda = n^2\pi^2/l^2$$

In beiden Kisten gilt es eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen. Die Differentialgleichungen sehen zwar gleich aus, spielen aber eine durchaus unterschiedliche Rolle. Die Separationskonstante λ gilt es schließlich auch zu bestimmen, und das geschieht in der linken Kiste.

Die linke Kiste stellt das Eigenwertproblem des Differentialoperators $\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2}$ auf

$\mathcal{D} := \{\phi \in \mathcal{C}^2 | \phi(0) = \phi(l) = 0\}$. Die Lösung dieses Eigenwertproblems lautet

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{l^2}\,, \qquad n = 1, 2, \dots\,; && (24.18) \\ \phi_n(x) &\propto \sin(k_n x)\,, \qquad k_n \equiv \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}\,. && (24.19) \end{aligned}$$

Nachdem in der linken Kiste durch die Randbedingungen der Wertebereich der λ bestimmt wurde, wenden wir uns der rechten Kiste zu. Hier handelt es sich offenbar um die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Eigenfrequenz $\omega_n = ck_n$. Für festes n kann

$$\sin(\omega_n t)\,, \qquad \cos(\omega_n t) \tag{24.20}$$

als Fundamentalsystem dienen.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass jede der Funktionen

$$y_n(x,t) = [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x)\,, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{24.21}$$

das Randwertproblem (**??**)–(**??**) löst.

24.5 Lösung des Anfangswertproblems

Aufgrund des Seperationsansatzes sind die (24.21) immer noch sehr spezielle Lösungen. Entsprechend sind die Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit keineswegs beliebig vorschreibbar wie in (24.17) gefordert.

Wegen der Linearität der Wellengleichung sind allerdings auch beliebige Summen der y_n,

$$y(x,t) = \sum_n [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{24.22}$$

sog *Linearkombinationen*, wiederum Lösungen der Randwertproblems, auch wenn diese Linearkombinationen dann im Allgemeinen nicht mehr separierbar sind. Für vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (24.17) müssen die Koeffizienten a_n, b_n nur so gewählt werden, dass

$$y(x,0) \equiv \sum_n a_n \sin(k_n x) = f(x)\,, \tag{24.23}$$

$$\dot{y}(x,0) \equiv \sum_n \omega_n b_n \sin(k_n x) = g(x)\,. \tag{24.24}$$

Die a_n, b_n sind also nicht anderes als die Fourierkoeffizienten der Entwicklung der Funktionen $f(x), g(x)$ in einer Fourierreihe (hier: Sinus-Fourierreihe).

24.6 Übungen

▷ **Aufgabe 24-1** dupa

Die schwingende Saite vermittelt auch ein schönes Beispiel einer einfachen Feldtheorie. Wir erinnern uns. Für ein Feld $y(x,t)$ erhält man die Feldgleichung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0\,, \tag{24.25}$$

wobei

$$S[y] := \int_{t_0}^{t_1} L[y,\dot{y}]dt \tag{24.26}$$

das *Wirkungsfunktional*,

$$L[y,\dot{y}] := \int \mathcal{L}(y,\dot{y},y')dx \tag{24.27}$$

ein *Lagrangefunktional*, und $\mathcal{L}(y,\dot{y},y')$ sog *Lagrandgedichte*.

(a) Zeigen Sie dass sich die Wellengleichung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2c^2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}{y'}^2\,. \tag{24.28}$$

ergeben,

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\ddot{y} - y'' = 0\,. \tag{24.29}$$

Sei nun in Analogie zur Punktmechanik

$$\pi(x,t) := \frac{\delta L}{\delta \dot{y}(x,t)} \tag{24.30}$$

das zu y kanonisch konjugiert Feld ("kanonisch konjugiertes Impulsfeld"), und

$$H[y,\pi] := \int \pi\dot{y}dx - L[y,\dot{y}] \tag{24.31}$$

das *Hamiltonfunktional*. Dann können die Feldgleichungen statt über das Prinzip der kleinsten Wirkung auch Hamilton'sch formuliert werden,

$$\dot{y}(x,t) = \frac{\delta H}{\delta\pi(x,t)}\,, \tag{24.32}$$

$$\dot{\pi}(x,t) = -\frac{\delta H}{\delta y(x,t)}\,. \tag{24.33}$$

Die Hamiltonsche Formulierung ist üblicherweise der Ausgangspunkt für die sog *kanonische Quantisierung* einer Feldtheorie. Quantisieren tun wir hier aber nichts, sondern bleiben ganz klassisch.

(b) Zeigen Sie, dass sich aus dem Lagrangefunktional der Wellengleichung () das folgende Hamiltonfunktional ergibt,

$$H[y,\pi] = \int \mathcal{H}dx\,, \qquad \mathcal{H} = \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}y'^2\,. \tag{24.34}$$

und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{y} = c^2\pi\,, \tag{24.35}$$

$$\dot{\pi} = y''\,. \tag{24.36}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass das völlig äquivalent der Wellengleichung.

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung; die zeitlichen Ableitungen sind dabei für die zeitliche Entwicklung, man sagt auch Propagation, des Feldes verantwortlich. Die räumlichen Ableitungen verknüpfen die Feldwerte bei x mit den Werten einer infinitesimalen Nachbarschaft.

Räumliche Albeitungen übersetzen sich unter der Fouriertransformation in die strikt lokale Multiplikation mit einer Wellenzahl – aus partiellen DGL werden gewöhnliche DGL in der Variablen Zeit.

Wegen der Einspannbedingung $y(x=0,t) = y(x=l,t) = 0$, die ja für alle Zeiten gelten soll, können die Felder $y(x,t)$ und $\pi(x,t)$ unserer schwingenden Saite immer nach Sinusfunktionen entwickelt werden,

$$y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n y_n(t) \sin k_n x \,, \qquad k_n = \frac{n\pi}{l} \,, \quad n = 1,2,\ldots\,, \tag{24.37}$$

$$\pi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n p_n(t) \sin k_n x \,. \tag{24.38}$$

Setzt man ()–() in den Ausdruck für das Hamiltonfunktional ein, berücksichtigt bei der Integration die Orthonormalitätsbeziehung, findet man

$$H = \sum_n \frac{c^2 p_n^2}{2} + \frac{\omega_n^2}{2c^2} y_n^2 \,, \qquad \omega_n \equiv c k_n = n \frac{\pi c}{l} \,. \tag{24.39}$$

Jeder Term in dieser Summe sieht nicht nur so aus, sondern ist in der Tat die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators mit “Masse” c^{-2} und Eigenfrequenz ω_n. Die Saite – nichts als eine Menge von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren! Aus () leitet man leicht die Hamilton’schen Bewegungsgleichungen ab,

$$\dot{y}_n = c^2 p_n \,, \qquad \dot{p}_n = \frac{\omega_n^2}{c^2} y_n \,, \qquad n = 1,2,\ldots\,. \tag{24.40}$$

Zum gleichen Resultat gelangt man, wenn man die Bewegungsgleichungen () direkt – im Sinne von () – Fourier transformiert.

Statt der (überabzählbar) unendlich vielen Amplituden $y(x,t)$, für jeden Raumpunkt x eine, übernehmen jetzt die (abzählbar) unendlich vielen Fourierkoeffizienten $y_n(t)$, sog *Normalkoordinaten*, die Rolle der dynamischen Freiheitsgrade. Statt mit einer "komplizierten" partiellen Differentialgleichung haben wir es nun mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun die obendrein besonders einfach zu lösen sind. Gelobt sei Joseph Fourier (1768–1830) der uns als Mathematiker, Ingenieur und Politiker unter Napoleon durch sein Buch *La Theorie analytique de la chaleur* (1822) die "Bibel des mathematischen Physikers" (Arnold Sommerfeld) beschert hat!

Nach diesen ausführlichen Vorbemerkungen haben Sie sicherlich nichts dagegen selber noch etwas zu rechnen.

(c) Aus dem Berliner Symphonieorchester erreicht Sie die Anfrage, an welcher Stelle eine Saite gezupft werden soll, um möglichst viel Betonung auf dem dritten Oberton zu erzielen. Mitgeteilt wird Ihnen auch, dass die Kraft die beim Zupfen aufgebracht werden kann, durchaus beschränkt ist.

Tja, nun sind Sie dran . . . .