Kapitel 25

Diracs δ-Funktion

25.1 Intro

In einer Kartoffel ist Masse mehr oder weniger gleichmäßig verteilt. Genauen Aufschluss gibt ihre sog *Massedichte*, hier bezeichnet $\varrho(\vec{x})$. Definitionsgemäß

$$m_V := \int_V \varrho(\mathbf{x}) dV \tag{25.1}$$

die im Volumen V vorhandene Masse.

Schrumpft die Kartoffel zu einem Massepunkt, wird die gesamte Masse M in einem einzigen Punkt $\mathbf{r}$ vereinigt. Die Massedichte ist nur für $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ verschieden von Null, notiert

$$\varrho(\mathbf{x}) = M\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\,, \tag{25.2}$$

wobei

$$\int_V \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r})dV = \begin{cases} 1 \quad , & \text{falls } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{25.3}$$

die Definitionsgleichung für **Diracs δ-Funktion**.

Eine Funktion, deren Integral über Gebiete, die nur einen Punkt $\mathbf{r}$ nicht enthalten, sonst aber beliebig gewählt werden können, den Wert Null ergibt stellt man sich als PhysikerIn gerne als Funktion vor, die überall Null ist, nur nicht in einem Punkt,

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{r}\,. \tag{25.4}$$

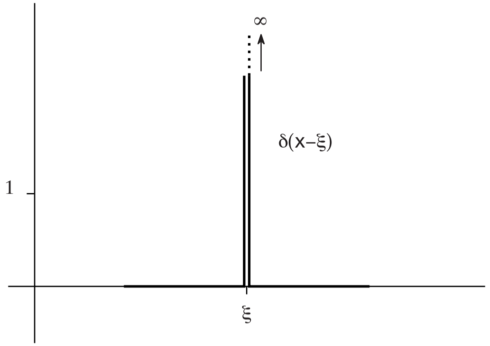

Abb 25.1 *Beliebte Karikatur der Deltafunktion.*

Die Größe des effektiven Integrationsvolumens in Gl. (25.3) ist demnach Null. Den endlichen Wert des Integrals erklärt man sich dann damit, dass die δ-Funktion bei $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ den Wert ∞ annimmt, sodass aus $0 \cdot \infty$ etwas Endliches (nämlich 1) resultiert.

MathematikerInnen knirschen hier mit den Zähnen: "Unendlich" ist kein akzeptabler Funktionswert, $0 \cdot \infty$ ist schlicht Quark, daher δ sicherlich keine Funktion im üblichen Sinne – sondern eine sog **Distribution**. Solche (und andere) Distributionen werden in der Distributionentheorie studiert. Dort lernt man dann, dass $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r})$ eigentlich ein lineares Funktional, also eine Abbildung, die jeder bei $\mathbf{r}$ stetigen Funktion f ihren Wert an der Stelle $\mathbf{r}$ zuweist; in der Notation der PhysikerInnen[1]

$$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}) f(\mathbf{x}) dV = f(\mathbf{r})\,. \tag{25.5}$$

Wer es sich zutraut, darf die etwas non-chalante "Definition" (25.4) durch die Gl. (25.5) ersetzen. Wir nehmen uns allerdings die Freiheit, und reden weiterhin von der δ-Funktion, auch wenn es sich dabei eigentlich um eine Distribution handelt.

[1] Auch diese Notation mögen MathematikerInnen nicht, suggeriert sie doch dass $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r})$ so etwas wie ein Integralkern ist, also wiederum eine Funktion (im mathematischen Sinne), was sie halt nicht ist. Stattdessen schreiben sie $\delta_{\mathbf{r}}[f] = f(\mathbf{r})$ oder ähnliches.

©Martin Wilkens

25.2 Darstellungen der δ-Funktion

Die δ-Funktion spielt in der theoretischen Physik eine hervorragende Rolle. Grund genug, sich mit ihr näher auseinanderzusetzen. Dabei werden wir uns zunächst auf den eindimensionalen Fall beschränken, in PhysikerInnen-Sprache also

$$\int \delta(x-\xi)f(x)dx = f(\xi)\,. \tag{25.6}$$

Die δ-Funktion wird gerne als Limes einer Funktionenfolge aufgefasst. Betrachten wir zum Beispiel eine Folge von Kastenfunktionen,

$$\chi_n(x-\xi) := \begin{cases} n/\sigma & \xi - \frac{\sigma}{2n} \le x \le \xi + \frac{\sigma}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,. \tag{25.7}$$

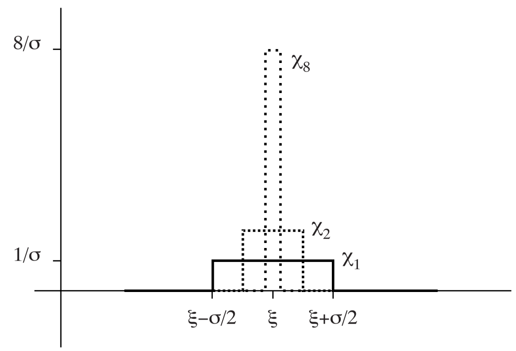

Abb 25.2 *Kastenfunktionen χ_n für $n = 1, 2, 8$.*

Für wachsendes n schaut man auf immer schmaler und höher werdende, um $x = \xi$ herum zentrierte Funktionsgraphen. Im Limes $n \to \infty$ wird die Kastenfunktion unendlich schmal,

$$\lim_{n\to\infty} \chi_n(x-\xi) = 0 \quad x \neq \xi\,. \tag{25.8}$$

Die Fläche unter der Kastenfunktion ist allerdings unabhängig von n immer die Gleiche,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(x-\xi)dx = 1\,. \tag{25.9}$$

Insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \chi_n(x-\xi)dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } \xi \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,. \tag{25.10}$$

Man beachte, dass wir hier mit Bedacht nicht geschrieben haben $\int \lim \chi_n dx = 1$. Weil eben $\lim \chi_n$ keine Funktion im strengen Sinne, wüsste man doch garnicht, welchen Wert das Integral von diesem Ding denn aufwiese. Limesbildung und Integration vertauschen hier halt nicht.

Analog läßt sich Gl. (25.6) formulieren,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \chi_n(x-\xi)f(x)dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{falls } \xi \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{25.11}$$

und mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung leicht beweisen,

$$\int_a^b f(x)\chi_n(x-\xi)dx = f(\zeta)\int_a^b \chi_n(x-\xi)\,, \qquad \zeta \in [a,b]\cap[\xi-\tfrac{\sigma}{2n},\xi+\tfrac{\sigma}{2n}] \tag{25.12}$$

Für $n \to \infty$ zieht sich das Intervall $[\xi-\frac{\sigma}{2n},\xi+\frac{\sigma}{2n}]$ auf einen Punkt ξ zusammen, und man darf getrost ersetzen $f(\zeta) \to f(\xi)$. Liegt ξ im Intervall $[a,b]$, so ist der Wert des Integrals 1, sonst 0.

Zusammengefasst

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty}\chi_n(x-\xi) \tag{25.13}$$

wobei der Limes im Sinne (25.11) zu verstehen ist (also erst Integration, dann Grenzwertbildung).

Die Darstellung über den Limes einer Folge von Kastenfunktionen ist beileibe nicht die einzige Möglichkeit, der δ-Funktion Sinn zu verleihen. In den Übungen lernene Sie ander Möglichkeiten kenne, etwa via Gaussfunktionen oder vie Lorentzfunktionen.

Von hervorragender Bedeutung die Darstellung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\frac{dk}{2\pi} = \delta(x-\xi) \tag{25.14}$$

die in der Theorie der **Fouriertransformation** eine entscheidende Role spielt. Der Betrag des Integranden ist $|e^{ik(x-\xi)}| = 1$, wird also insbesondere für $x \to \pm\infty$

©Martin Wilkens

nicht Null. Wörtlich genommen ist das Integral auf der linken Seite schlicht “ill-defined” (englisch für “sinnlos”) und kann nur durch zusätzliche Erläuterungen, sog **Regularisierung**, gerettet werden.

Wir konzentrieren uns hier auf die Regularisierung durch Abschneiden. Die Regularisierung mit einem Gaussschen Faktor bzw einer Exponentialfunktion überlassen wir den Übungen. Sei also

$$s_n(x-\xi) := \int_{-n/\sigma}^{+n/\sigma} e^{ik(x-\xi)} \frac{dk}{2\pi} \tag{25.15}$$

dann lautet die Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x-\xi) = \delta(x-\xi)\,, \tag{25.16}$$

wobei der Grenzwert erst nach Integration über eine Testfuntion auszuführen ist.

Das Integral ist schnell berechnet,

$$s_n(x-\xi) = \frac{\sin[n(x-\xi)/\sigma]}{\pi(x-\xi)}\,. \tag{25.17}$$

Erinnert man sich jetzt an $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ (was man ja mal im Bronstein nachschlagen kann), erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_n(x-\xi)dx = 1\,, \tag{25.18}$$

womit zumindest die Bedinung (25.3) erfüllt ist.

Etwas schwieriger die Bedingung (25.4): im Grenzfall $n \to \infty$ oszilliert $s_n(x-\xi)$ zwar rasend schnell, wird aber für $x \neq \xi$ nicht Null. Allerdings gilt für jedes Intervall $[a,b]$, das den Punkt ξ nicht entählt,

$$\left| \int_a^b s_n(x-\xi)dx \right| \leq C/n \to 0\,, \qquad \xi \notin [a,b] \tag{25.19}$$

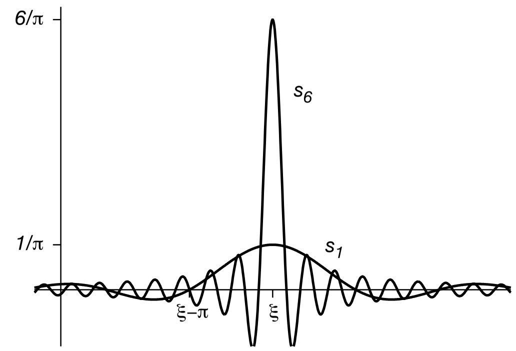

Abb 25.3 *Sinc-Funktionen* s_n *für* $n = 1, 6$.

worin C eine nur von a, b, ξ abhängige Konstante. MathematikerInnen sagen “auf jedem Intervall, das ξ nicht enthält, $\lim s_n(x-\xi) = 0$ fast überall”, und das ist – unter dem Schutz von Integralen – äquivalent “auf jedem Intervall, das ξ nicht enthält, $\lim_n s_n(x-\xi) = 0$.

25.3 Eigenschaften

Die δ-Funktion weist eine Reihe von Eigenschaften auf, die sich unmittelbar aus ihrer Definition (25.6) ergeben.

- Parität
$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{25.20}$$
- Multiplikaton mit Funktion
$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a) \tag{25.21}$$
insbesondere
$$x\delta(x) = 0\,. \tag{25.22}$$
- Variablentransformation
$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{25.23}$$
wobei die x_i Nullstellen der Funktion $g(x)$. Wichtige Spezialfälle sind
$$\delta[c(x-a)] = \frac{1}{|c|}\delta(x-a) \tag{25.24}$$
$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right] \tag{25.25}$$

- Stammfunktion

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x^{'} - a)dx^{'} := \theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} \tag{25.26}$$

bzw

$$\frac{d}{dx}\theta(x-a) = \delta(x-a) \tag{25.27}$$

- Ableitung

$$\delta'(x-a) = -\delta(x-a)\frac{d}{dx} \tag{25.28}$$

25.4 Mehrdimensionale δ-Funktionen

In kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \equiv \vec{x}\,, \qquad \mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0) \equiv \vec{r}\,, \qquad dV = dx\,dy\,dz \equiv d^3x \tag{25.29}$$

ist offensichtlich

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \equiv \delta(\vec{x} - \vec{r}) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\,. \tag{25.30}$$

In krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{x} = (u, v, w)\,, \qquad \mathbf{r} = (u_0, v_0, w_0)\,, \qquad dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du\,dv\,dw \tag{25.31}$$

Definitionsgemäß $\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) f(\mathbf{x}) dV = f(u_0, v_0, w_0)$ was angesichts der Jacobideterminante im Volumenelement durch

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) = \frac{1}{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|}\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0) \tag{25.32}$$

garantiert ist.

Spezielfälle sind die beliebten **Kugelkoordinaten**,

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{25.33}$$

und **Zylinderkoordinaten**,

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\,. \tag{25.34}$$

25.5 δ-Funktion und Greensche Funktionen

Eine wichtige Anwendung erfährt die δ-Funktion in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Betrachten wir als Beispiel den getriebenen harmonischen Oszillator mit Dämpfung,

$$m\ddot{q} + m\gamma_0\dot{q} + m\omega_0^2 q = F(t)\,, \tag{25.35}$$

bzw kurz-und-bündig notiert

$$\hat{L}_t q(t) = F(t) \tag{25.36}$$

worin $\hat{L}_t$ ein linearer Differentialoperator,

$$L_t := m\frac{d^2}{dt^2} + m\gamma_0\frac{d}{dt} + m\omega_0^2\,. \tag{25.37}$$

Die allgemeine Lösung der DGL (25.35) ist von der Form

$$q(t) = q_{\mathrm{hom}}(t) + q_{\mathrm{spez}}(t)\,, \tag{25.38}$$

worin $q_{\mathrm{hom}}(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\hat{L}_t q_{\mathrm{hom}}(t) = 0$, und $q_{\mathrm{spez}}(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, $\hat{L}_t q_{\mathrm{spez}}(t) = F(t)$.

©Martin Wilkens

Stellt man sich nun vor, man habe eine Lösung $G(t,t')$ einer verwandten DGL,

$$\hat{L}_t G(t,t') = \delta(t-t') \tag{25.39}$$

so wäre doch die Lösung von (25.35) bzw (25.36) auf eine einfache Integration zurückgeführt,

$$q(t) = q_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')F(t')dt' \,. \tag{25.40}$$

Beweis? Anwendung von $\hat{L}_t$ auf der rechten Seite, berücksichtigen $\hat{L}_t q_{\text{hom}}(t) = 0$, beachten, dass $\hat{L}_t \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')F(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}_t G(t,t')F(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')F(t')dt' = F(t)$ – und fertig ist die Laube.

Eine Funktion $G(t,t')$ die einer inhomogene DGL mit einer δ-Funktion als Inhomogentitšt genügt, heißt **Greensche Funktion**. Die Greensche Funktion kann offensichtlich mit der Auslenkung eines HO identifiziert werden, dem zum Zeitpunkt $t = t'$ ein "Einheitskraftstoß" (physikalisch: Hammerschlag) versetzt wurde. Der Nutzen so einer Greenschen Funktion liegt auf der Hand: kennt man Sie, muss man nicht jedes mal von neuem eine DGL (25.36) lösen wenn man die Kraft $F(t)$ auf der rechten Seite ändert.

Die Greensche Funktion ist nicht eindeutig: klare Sache – addiert man zu einer gegebenen Greenschen Funktion eine Lösung der homogenen Gleichung hat man wieder eine Greensche Funktion. Eine eindeutige Greensche Funktion erhält man durch die Zusatzforderungen, meist das Verhalten vor bzw nach dem Hammerschlag betreffend.

Beliebt ist hier die sog **retardierte Greensfunktion**, bezeichnet $G_{\text{ret}}(t,t')$, wobei definitionsgemäß $G_{\text{ret}}(t,t') = 0$ für $t < t'$. Physikalisch: der HO befindet sich vor dem Hammerschlag in Ruhe. Für Zeiten nach dem Kraftstoß, $t > t'$, schwingt der

HO frei, allenfalls gedämpft,

$$G_{\text{ret}}(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{für Zeiten } t < t'\,, \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m}\sin[\omega(t-t')] & \text{für Zeiten } t > t'\,. \end{cases} \tag{25.41}$$

Die "Knickstelle" bei $t = t'$ garantiert, dass sich in der Anwendung von L_t die δ-Funktion $\delta(t-t')$ ergibt.

▷ Aufgabe 25-1 (Deltafolge) (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$g_n(x-\xi) := \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}\,, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{25.42}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der δ-Funktion vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}\,. \tag{25.43}$$

Hinweis: Machen Sie sich ein Bild der Folge; überzeugen Sie sich davon, dass $\int g_n(x-\xi)dx = 1$ und $\lim_{n\to\infty} g_n(x-\xi) = 0$ für $x \neq \xi$.

▷ Aufgabe 25-2 (Regularisierung mit Exponentialfunktion)

In der Vorlesung sind Sie mit einem Integral $\int e^{ikx}dk$ konfrontiert worden, und Sie haben gelernt, das so ein Integral erst regularisiert werden muss, bevor es weiter verarbeitet werden kann. Hier betrachten wir die Regularisierung mit einer Exponentialfunktion im Integranden.

Beweisen Sie, dass die Folge von Integralen

$$l_n(x-\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)-\sigma|k|/n} \frac{dk}{2\pi}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{25.47}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der δ-Funktione vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty} l_n(x-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} \frac{dk}{2\pi}\,. \tag{25.48}$$

 ©Martin Wilkens