Kapitel 26

Die Fourier-Transformation

Hat man ein T-periodische Funktion, kann man sich dafür interessieren, was im Grenzfall $T \to \infty$ passiert, wie also die Fourieranalyse von nicht-periodischen Funktionen beschaffen ist.

26.1 Heuristik

Eine T-periodische Funktion $f(t+T) = f(t)$ gestattet – unter milden Voraussetzungen an f – eine Darstellung in Form einer Fourierreihe (die Vorfaktoren sind Konvention)

$$f(t) = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \tag{26.1}$$

worin die Fourierkoeffizienten $\tilde{f}_n$ gegeben sind

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f(t) dt \,. \tag{26.2}$$

Die Darstellung offenbart, dass f als Überlagerung von Schwingungen angesehen werden kann, deren Frequenzen Vielfache der Grundfrequenz $\frac{2\pi}{T}$, also $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$. Je größer die Periode T, desto enger liegen die Frequenzen auf der Frequenzachse beieinander, und desto weniger unterscheiden sich $\tilde{f}_n$ und $\tilde{f}_{n+1}$. Für genügend große T liegt es daher nahe, die Reihe als Grenzwert der Riemann-Summe eines Integrals zu interpretieren – für genügend langsam veränderliche $F(n)$ ist schließlich $\sum_n F(n) \approx \int dn F(n)$. Mit der Variablentransformation $n \mapsto \omega := \frac{2\pi}{T} n$, ergo $dn = \frac{2\pi}{T} d\omega$, liest sich () im Limes $T \to \infty$,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(\omega) e^{-\omega t} d\omega \tag{26.3}$$

worin $\tilde{f}(\omega)$ nun die sog. *Fourier-Transformierte* der Funktion $f(t)$,

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{26.4}$$

Im Gegensatz zur Fourier-Reihe () vermittelt () eine kontinuierliche Überlagerung harmonischer Schwingungen, wobei $\tilde{f}(\omega)$ nun Partialamplitude der in f enthaltenen Teilschwingung $e^{i\omega t}$. Zuweilen nennt man () die *spektrale Zerlegung* der aperiodischen Funktion f und $\tilde{f}$ ihre Spektralfunktion. Im Gegensatz zu einer periodischen Funktion, die ein diskretes Spektrum aufweist, weist eine aperiodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum auf.

26.2 Definition und Beispiele

Angeregt durch die Heuristik im vorangegangenen Abschnitt, hier nun die

Defintion (Fourier-Transformierte) Existiert für eine Funktion f der Cauchy-Hauptwert $\int e^{-i\omega t} f(t)dt$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$,[1] so heißt

$$\tilde{f}(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \tag{26.5}$$

die *Fourier-Transformierte* bzw. die *Spektralfunktion* von f. Exisitert darüber hinaus der Cauchy-Hauptwert von $\int e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)d\omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist die *inverse* Fourier-Transformierte der Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{26.6}$$

Satz (Konvergenzsatz) Sofern f absolut integrierbar, existiert die Fourier-Transformierte für alle $\omega \in \mathbb{R}$, ist beschränkt und stetig, und es gilt die Parseval-Plancherel-Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{26.7}$$

Beweisskizze: Es ist $|\tilde{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int e^{i\omega t} f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt < \infty$ (letztere Ungleichung nach Voraussetzung), somit gleichmäßige Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\mathcal{F}[f](\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Zu beachten ist, dass die Fourier-Transformierte einer absolut integrierbaren Funktion nicht notwendig absolut integrierbar zu sein braucht. Allerdings gilt der

[1] Für eine Funktion f mit einer isolierten Singularität x_0 auf der reellen Achse ist der Cauchy-Hauptwert definiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\delta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\delta} f(x) + \lim_{x_0+\delta}^{\infty} f(x)dx \right]$.

Satz (Umkehr- und Eindeutigkeitssatz) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, in jedem endlichen Intervall stückweise differenzierbar und genügt der Mittelwerteigenschaft $f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t-) + f(t+)\right]$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann ist mit $f(t)$ auch $\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$ Fourier-transformierbar, und es gilt $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Kurz: unter den genannten Voraussetzungen ist die Fouriertransformation umkehrbar eindeutig.

Beispiel 1 Der Rechteckimpuls

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases} \tag{26.8}$$

hat die Spektralfunktion

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \tag{26.9}$$

Beispiel 2 Die für $t > 0$ gedämpfte Exponentialfunktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \tag{26.10}$$

hat als Spektralfunktion

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega} \tag{26.11}$$

Beispiel 3 Die symmetrisch gedämpfte Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{-a|t|} \tag{26.12}$$

hat als Spektralfunktion

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{26.13}$$

An diesem Beispiel erkennt man sehr schön

> Ist $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ langsam abfallend, so ein Verhalten genannt *breitbandig*, dann ist $\tilde{f}$ für $\omega \to \pm\infty$ rasch abfallend, genannt *schmalbandig*, und umgekehrt.

Eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte können nicht beide schmalbandig sein – ein Umstand, der in der Quantenmechanik unter dem Begriff *Unschärferelation* fungiert.

Als Extrembeispiel sei die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion angeführt, $\mathcal{F}(\delta(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Der "Kraftstoß" bzw. "$\delta$-Impuls" hat ein gleichverteiltes Spektrum; er ist Überlagerung von Schwingungen zu allen Frequenzen mit gleicher Amplitude. Für den um a verzögerten Kraftstoß $\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega a}$.

26.3 Rechenregeln

- *Linearität*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \rightsquigarrow \alpha \tilde{f}(\omega) + \beta \tilde{g}(\omega) \tag{26.14}$$

- *Konjugation*

$$f^*(t) \rightsquigarrow \tilde{f}^*(-\omega) \tag{26.15}$$

- *Streckung*

$$f(ct) \rightsquigarrow \frac{1}{|c|}\tilde{f}(\omega/c) \tag{26.16}$$

- *Verschiebung*

$$f(t-a) \quad \rightsquigarrow \quad e^{-i\omega a}\tilde{f}(\omega) \tag{26.17}$$
$$e^{i\Omega t}f(t) \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(\omega-\Omega) \tag{26.18}$$

- *Symmetrie*

$$f(-t)=f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(-\omega)=\tilde{f}(\omega) \tag{26.19}$$
$$f(-t)=-f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(-\omega)=-\tilde{f}(\omega) \tag{26.20}$$

- *Differentiation*

$$\frac{d}{dt}f(t) \quad \rightsquigarrow \quad i\omega\tilde{f}(\omega) \tag{26.21}$$
$$tf(t) \quad \rightsquigarrow \quad i\frac{d}{d\omega}\tilde{f}(\omega) \tag{26.22}$$

Insbesondere letztere Regel ist äußerst nützlich, gestattet sie doch, lineare DGL in algebraische Gleichungen zu verwandeln. Betrachte etwa die DGL zweiter Ordnung

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=f(t) \tag{26.23}$$

Für absolut integrierbare Funktionen $x(t)$ und $f(t)$ ergibt sich via (26.14) und (26.22)

$$(i\omega)^2a\tilde{q}+i\omega b\tilde{q}+c\tilde{q}=\tilde{f} \tag{26.24}$$

also eine lineare Gleichung für $\tilde{q}$. Die Lösung lautet

$$\tilde{q} = \tilde{h}(\omega)\tilde{f}(\omega) \tag{26.25}$$

mit der sog. *Übertragungsfunktion* $\tilde{h}$,

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 a + i\omega b + c} \tag{26.26}$$

Was bleibt, ist für gegebenes $\tilde{f}(\omega)$ mittels inverser Fourier-Transformation den Zeitverlauf $q(t)$ zu bestimmen ....

In der Signalverarbeitung begegnet einem häufig das *Faltungsprodukt* zweier Funktionen f und g,

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{26.27}$$

Die Fourier-Transformierte so eines Faltungsprodukts ist gegeben,

$$(f * g)(t) \rightsquigarrow \sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega) \tag{26.28}$$

Beispiel: Das Faltungsprodukt des Rechteckimpulses mit sich selbst gib eine "Zeltfunktion"

$$(\chi * \chi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-\tau)\chi(\tau)d\tau = \begin{cases} 2-|t| & , \quad |t| < 2\,, \\ 0 & , \quad |t| \leq 2\,. \end{cases} \tag{26.29}$$

Angesichts (26.9) ist die Spektralfunktion dann gegeben $\mathcal{F}[\chi * \chi] = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$.

Beispiel: Ein ideales Tiefpassfilter lässt alle Schwingungen mit Frequenzen $|\omega| \leq \Omega$ unverändert passieren, sperrt aber für Frequenzen $|\omega| > \Omega$. Die sog. *Übertragungsfunktion* für so einen Filter ist definiert

$$\tilde{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \Omega\,, \\ 0 & , \quad |\omega| > \Omega\,. \end{cases} \tag{26.30}$$

Die zughörige Zeitfunktion ist mit Blick auf () schnell angegeben,

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\Omega t}{t} \tag{26.31}$$

Liegt am Eingang ein Signal $x(t)$ an, so ist das Ausgangssignal das Faltungsprodukt $y(t) = (h{*}x)(t)$ (im Fourier-Raum formuliert: $\tilde{y}(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{x}(\omega)$, wo $\tilde{x}(\omega)$ die Fourier-Transformierte des Eingangsignals)

26.4 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben wurden entnommen: Meyberg und Vachenauer *Höhere Mathematik II*, Springer 2003, S. 356-357.

▷ **Aufgabe 26-1**

Man bestimme die Fourier-Transformierten der Funktionen

$$(a) \quad f(t) = \begin{cases} t^2 & , \quad 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{26.32}$$

$$(b) \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2} \tag{26.33}$$

▷ **Aufgabe 26-2**

Ein Zeitsignal hat die Spektralfunktion $\tilde{f}(\omega) = e^{-a|\omega|+i\omega}$ mit $a > 0$. Man berechne die Gesamtenergie $E := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ in Abhängigkeit von a.

▷ **Aufgabe 26-3**

Eine unendlich lange Schiene ist im Schotterbett elastisch gelagert und mit der spezifischen Last $w(x)$ belegt. Für die Durchbiegung $u(x)$ gilt

$$u^{(4)} + \alpha^4 u = w(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{26.34}$$

wo $u^{(4)}$ die vierte Ableitung der Funktion u.

(a) Man bestätige mittels Fourier-Transformation die Integraldarstellung für $u(x)$,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{w}(\omega)}{\omega^4 + \alpha^4} e^{i\omega x} dx \tag{26.35}$$

wo $\tilde{w}(\omega)$ die Fourier-Transformierte von $w(x)$.

(b) Wie lautet $u(x)$ für $w(x) = e^{-|x|}$?

▷ Aufgabe 26-4

Die Übertragungsfunktion eines einfachen Bandpass-Filters ist gegeben

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega - \Omega| < b \\ 0 & , \quad |\omega - \Omega| > b \end{cases} \tag{26.36}$$

Wie lautet die Zeitfunktion des Filters?