Mathematische Methoden II LA

- SoSe 2019 -

Beispielhafte Klausur für Teil II der Mathematischen Methoden (90 Punkte)
Bearbeitungszeit: 120 Min. Hilfsmittel; Keine

▷ **Aufgabe 1** (10 Punkte)

Ein Teilchen reist auf einer Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze. Wie würden Sie die Kurve bezeichnen? Welche Kurve ergibt sich in der Projektion auf die Ebene $z = 0$?

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens und seine Beschleunigung.

▷ **Aufgabe 2** (15 Punkte)

Gegeben eine Potentialfunktion $\Phi(x, y) = xy$. Bestimmen Sie Höhenlinien für $\Phi = -2, -1, 0, 1, 2$. Berechnen Sie das Gradientenfeld grad Φ, geben den Gradienten für $(x, y) = (1, 1)$, $(x, y) = (-1, 1)$, $(x, y) = (1, 2)$, $(x, y) = (-2, -1)$. Illustratieren Sie Ihre Resultate mit einer gut beschrifteten Skizze.

▷ **Aufgabe 3** (15 Punkte)

Gegeben ein Flächenstück Σ, in kartesischen Koordinaten parametrisiert

$$\vec{a}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + u + v \\ 1 - u - v \\ 1 + \sqrt{2}u \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq u \leq 1\,, 0 \leq v \leq 1\,. \tag{2}$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze. Wie würden Sie das Flächenstück in Worten beschreiben?

(b) Berechnen Sie den Vektorfluss

$$\int_\Sigma \vec{A} \cdot d^2\vec{a} \tag{3}$$

des Vektorfeldes $\vec{A} = y\vec{e}_X$.

▷ **Aufgabe 4** (15 Punkte)

Das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(R^2 - x^2 - z^2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

beschreibt für $x^2 + z^2 \leq R^2$ die sog. *laminare Rohrströmung*. Für $x^2 + z^2 \geq R^2$ sei $\vec{A} = 0$.

(a) Machen Sie sich ein Bild. In welcher Richtung verläuft die Strömung?

(b) Berechnen Sie das Quellenfeld div $\vec{A}$. Hat die Strömung irgendwo Quellen?

(c) Berechnen Sie das Wirbelfeld rot $\vec{A}$. Hat die Strömung Wirbel? Machen Sie sich gegebenenfalls ein Bild.

▷ **Aufgabe 5** (15 Punkte)

Gegeben ein Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z) = (3x^2 + 2y, -9xy, 8xz^2)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$ wo C die Gerade von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$.

▷ **Aufgabe 6** (10 Punkte)

Man berechne die Fourier-Transformierte der Funktion $f(a) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

▷ **Aufgabe 7** (10 Punkte)

Für genügend große Körper wird der freie Fall in Luft beschrieben

$$m\dot{v} = -mg + kv^2 \tag{5}$$

wo v die Fallgeschwindigkeit, m die Masse des Körpers, k eine Körper-Spezifische Konstante, und g die Erdbeschleunigung.

(a) Bestimmen Sie die Lösung der DGL für die Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Stellen Sie die Lösung in einem Hodographen (Geschwindigkeits-Zeit Diagramm) grafisch dar.

(b) Die Endgeschwindigkeit $\lim_{t\to\infty} v(t)$ ist eine Funktion von k und m. Für einen Fallschirmspringer der Masse $m = 80$kg beträgt sie im Falle ungeöffneten Schirms ungefähr 50m/sec. Welchen Wert hat k?

Bemerkung: der Wert der Erdbeschleunigung beträgt $g \approx 10\text{m/sec}^2$.