

Mathematische Methoden I LA

- SoSe 2019 -

Beispielhafte Klausur für Teil I der Mathematischen Methoden (90 Punkte)
Bearbeitungszeit: 120 Min. Hilfsmittel; Keine

▷ **Aufgabe 1** (5 Punkte)

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + 5i$. Bestimmen Sie die Summe $z_1 + z_2$ und das Produkt $z_1 z_2$.

▷ **Aufgabe 2** (5 Punkte)

Gegeben die komplexe Zahl $z = 1 + i$. Berechnen Sie den Betrag $|z|$ und bestimmen Sie die Polardarstellung von z .

▷ **Aufgabe 3** (5 Punkte)

Gegeben die komplexe Zahl $z = 2 + 3i$. Bestimmen Sie den Kehrwert $\frac{1}{z}$ in der Form $\frac{1}{z} = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

▷ **Aufgabe 4** (5 Punkte)

Für die Gleichung $y^2 + x = 3$, $x, y \in \mathbb{R}$ bestimme und skizziere man die Lösungsmenge.

▷ **Aufgabe 5** (10 Punkte)

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, das Kreuzprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$, und das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

▷ **Aufgabe 6** (5 Punkte)

Gegeben ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Matrix $\underline{A} := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Bild von \vec{v} unter der durch \underline{A} definierten Abbildung. Im Vergleich von Bild und Urbild – was fällt Ihnen auf?

▷ **Aufgabe 7** (5 Punkte)

Man berechne die Determinante der Matrix

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

▷ **Aufgabe 8** (10 Punkte)

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

▷ **Aufgabe 9** (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$(a) \quad e^x \left(\sin x + \frac{x^3}{6} \right) \quad (4)$$

$$(b) \quad \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}, \quad |x| < 1 \quad (5)$$

$$(c) \quad \log_a x^{17} \quad (6)$$

$$(d) \quad \sin(\cos x) \quad (7)$$

▷ **Aufgabe 10** (7 Punkte)

Der Tangens, daran sei erinnert, ist definiert $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion, also $\tan(\arctan x) = x$. Berechnen Sie $\frac{d}{dx} \tan x$ und $\frac{d}{dx} \arctan x$.

▷ **Aufgabe 11** (10 Punkte)

Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$I_1 := \int_1^e dx \, x \cdot \ln x, \quad I_2 := \int_0^\pi dx \, x \cdot \cos x \quad (8)$$

▷ **Aufgabe 12** (5 Punkte)

Man bestimme die Taylorreihe der Funktion $\ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt $x=0$.

▷ **Aufgabe 13** (10 Punkte)

Für die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (9)$$

bestimme und skizzieren man ein reelles Fundamentalsystem für Parameterwerte $\omega_0 > \gamma$.