Mathematische Methoden II LA

- SoSe 2019 -

Übungsblatt 22 ($20+\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 06.06.2019 – Abgabe 12.06.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Deltafolge) (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$g_n(x-\xi) := \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der δ-Funktion vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{2}$$

Hinweis: Machen Sie sich ein Bild der Folge; überzeugen Sie sich davon, dass $\int g_n(x-\xi)dx = 1$ und $\lim_{n\to\infty} g_n(x-\xi) = 0$ für $x \neq \xi$.

▷ Aufgabe 2 (Regularisierung mit Exponentialfunktion) (6 Punkte)

In der Vorlesung sind Sie mit einem Integral $\int e^{ikx}dk$ konfrontiert worden, und Sie haben gelernt, das so ein Integral erst regularisiert werden muss, bevor es weiter verarbeitet werden kann. Hier betrachten wir die Regularisierung mit einer Exponentialfunktion im Integranden.

Beweisen Sie, dass die Folge von Integralen

$$l_n(x-\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)-\sigma|k|/n}\frac{dk}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der δ-Funktione vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty} l_n(x-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\frac{dk}{2\pi}. \tag{7}$$

▷ Aufgabe 3 (Poissongleichung für Punktquelle) (8 Punkte)

Die Poisson'sche Differentialgleichung

$$\Delta\phi(\vec{x}) = g(\vec{x}) \tag{13}$$

mit $\Delta =$ div grad der Laplaceoperator, ist vom Typ "inhomogene Partielle Differentialgleichung". Gesucht ist eine Funktion $\phi(\vec{x})$ die diese Gleichung für eine gegebenen Funktion $g(\vec{x})$ erfüllt. Im Kontext der Eletrostatik, etwa, wäre ϕ das elektrostatische Potential (dessen

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

Gradient das elektrische Feld, $\vec{E} = \mathrm{grad}\phi$), $g(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})$ mit ε_0 die Dielektrizitätskonstante und $\varrho(\vec{x})$ die elektrische Ladungsdichte.

Beweisen Sie die "Master-Identität" der Elektrostatik,

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \tag{14}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{x}'$. Berechnen Sie anschließend den Wert des Volumenintegrals $\int_{K_\epsilon(\vec{x}')} \Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'} d^3x$ worin $K_\epsilon(\vec{x}')$ eine um $\vec{x}'$ zentrierte Kugel vom Radius ϵ. Machen Sie dabei unbedingt vom Gauss'schen Satz Gebrauch ....