Mathematische Methoden II LA

- SoSe 2019 -

Übungsblatt 25 (20 Punkte)

Ausgabe 27.06.2019 – Abgabe 03.07.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Brechungsgesetze)** * (10 Punkte)

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass ein Lichtteilchen in einem inhomogenen Medium denjenigen Weg sucht (genannt Lichtstrahl), den es in kürzester Zeit zurücklegen kann.

In einem Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex $n(x, y, z)$ ist die *lokale* Lichtgeschwindigkeit (genauer: Phasenschnelligkeit) $v = c/n$ wo c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Reisezeit von A nach B längs irgendeines Weges $\mathbf{r}(\tau)$ (τ is Kurvenparameter) ist gegeben

$$T[\mathbf{r}] = \frac{1}{c} \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \tag{1}$$

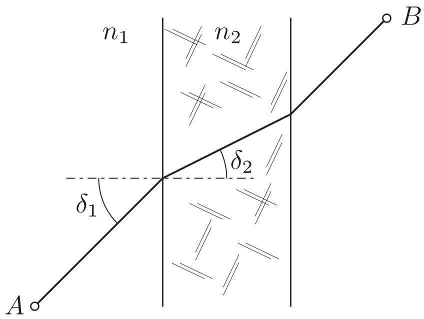
wo ds Euklidische Länge eines kleinen Wegstücks, $ds = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right| d\tau$.[1]

Zeigen Sie

(a) In homogenen Medien breitet Licht sich geradlinig aus.

(b) Der Lichtweg is umkehrbar.

(c) Das Snellius'she Brechungsgesetz $n_1 \sin(\delta_1) = n_2 \sin(\delta_2)$.



▷ **Aufgabe 2 (Erhaltungssatz)** * (10 Punkte)

Zeigen Sie: Sofern die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ nicht explizit von der Zeit t abhängt, gilt ein Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} [L - \dot{q}p] = 0 \,, \tag{2}$$

wo p abkürzend für $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ (genannt "kanonischer Impuls").

---

[1]Die Größe $\int_A^B n ds$ heißt auch "optische Weglänge"

Häufig hat man es mit einer Lagrangefunktion $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ zu tun. Mit der Verabredung $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, wie liest sich die sog *Hamiltonfunktion*

$$H(q,p) := L - \dot{q}p \tag{3}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass die Euler-Lagrange Gleichungen zu L äquivalent

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} && (4) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} && (5) \end{aligned}$$

in dieser Form genannt *Hamiltonsche Gleichungen*. DIe Hamilton'sche Formulierung kommt mit zwei Differentialgleichungen erster Ordnung – und ist der Newtonschen Formulierung mit einer Differentialgleichung zweiter Ordung vollständig äquivalent. In der Quantenmechanik regiert die Hamilton'sche Formulierung ...