Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 03 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 23.04.19 – Abgabe 30.04.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Rechenregeln Operatoren) (5 Punkte)

Bestätigen Sie die folgenden Rechenregeln für Operatoren. Fragen nach Definitionsbereichen dürfen Sie im ersten Anlauf non-chalant ignorieren ....

$$(\alpha\hat{A})^\dagger = \alpha^*\hat{A}^\dagger \tag{1}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{2}$$

$$[\hat{A},\hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger] \tag{3}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \tag{4}$$

$$(\hat{A}^\dagger)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^\dagger \tag{5}$$

Bermerkung: Die Aufgabe ist zwar nicht klausurisomorph, aber diese Rechenregeln werden dauernd gebraucht und es ist dringend angeraten, sie mal selbst zu beweisen ...

▷ Aufgabe 2 (Initiationsritus Quantenmechanik) (3 Punkte)

Seit Menschengedenken werden Studierende der Grundlagen der Quantenmechanik gebeten, zu beweisen:

(a) Im unitären Raum gilt die sog *Schwarz'sche Ungleichung*[2]

$$|\langle\psi,\chi\rangle| \leq \|\psi\|\|\chi\|\,, \tag{6}$$

(b) die sog *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|\psi+\chi\|^2 + \|\psi-\chi\|^2 = 2\|\psi\|^2 + 2\|\chi\|^2\,. \tag{7}$$

(c) und das Skalarprodukt kann durch die Norm ausgedrückt werden,

$$4\langle\psi,\chi\rangle = \|\psi+\chi\|^2 - \|\psi-\chi\|^2 + i\|i\psi+\chi\|^2 - i\|i\psi-\chi\|^2\,. \tag{8}$$

▷ Aufgabe 3 (Teilchen auf dem Kreis I)* ($6 + e$ Punkte)

Wir betrachten ein freies Teilchen in einer räumlichen Dimension – nur dass diese Dimension zu einem Kreis mit Umfang a aufgewickelt ist. Die verallgemeinerte Koordinate ist

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Für den "technischen Jargon" vgl. die Handreichung zu Hilberträumen, Operatoren etc. auf der Netzseite des Kurses ...

periodisch mit Periodenintervall $[0, a]$. Mit m die Masse des Teilchens lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{9}$$

Bevor Sie loslegen ist es vielleicht ganz nützlich einmal die klassischen Bewegungsgleichungen aufzustellen und für allgemeinen Anfangsbedingungen zu lösen (man beachte die Periodizität der Koordinate q).

Die quantisierte Version unseres Systems erhält man in der sog "kanonischen Weise". Der Ortsoperator $\hat{q}$, erklärt $(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x)$, und Impulsoperator $\hat{p}$, erklärt $(\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\psi'(x)$, bilden ein konjugiertes Paar mit Heisenbergkommutator

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\,. \tag{10}$$

Der Hilbertraum unseres Systems ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen über dem Periodenintervall $[0, a]$, also $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, a], dx) | \psi(0) = \psi(a)\}$. Hamiltonoperator wie in (9) nur halt H und p mit Hut auf dem Kopf.

(a) Zeigen Sie: Die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = E\psi$ auf $\mathcal{H}$ wird gelöst

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ik_n x} \tag{11}$$

worin k_n Wellenzahl

$$k_n = \frac{2\pi}{a} n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots\,. \tag{12}$$

(b) Die φ_n bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, also

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}\,, \tag{13}$$

$$\underset{\psi \in \mathcal{H}}{\forall} \|\psi\|^2 = \sum_n |\langle \varphi_n, \psi \rangle|^2\,. \tag{14}$$

Hinweis: Hier dürfen Sie ruhig Ihr Mathe-Skript, Stichwort Fourierreihen, zu Rate ziehen.

(c) Der Impulsoperator hat Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche sind das?

(d) Auf ganz $\mathcal{H}$ ist der Impuloperator sicherlich nicht beschränkt (Beweis?), nach einem Satz der Funktionalanalyis daher auch nicht stetig, und das sogar nirgends. Klingt furchtbar, ist aber nicht so schlimm. Viel wichtiger ist, ob sich eine in $\mathcal{H}$ dicht liegende Menge von Funktionen finden lässt, auf der der Impulsoperator selbstadjungiert ist. Zeigen Sie, dass das der Fall ist, und charakterisieren Sie diese Menge. (e Punkte)

▷ Aufgabe 4 (Teilchen auf dem Kreis II)* (6 Punkte)

Das Teilchen aus Aufgabe (2) sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha\varphi_0(x) + \beta\varphi_1(x) + \gamma\varphi_{-1}(x) \tag{15}$$

präpariert, wobei $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Ist Ψ korrekt normiert?

(a) Welche Bedeutung haben die Koeffizienten α, β, γ?
Hinweis: Denken Sie an eine Energie-, eine Impuls- und eine Orts-Messung. Füllen Sie die Lücken in den Sätzen: 1. "Mit der W'keit [Lücke] wird der Werte [Lücke] an einem Energiemessgerät abgelesen"; 2. "Mit der W'keit [Lücke] wird der Wert [Lücke] an einem Impulsmessgerät abgelesen"; 3. "Mit der W'keit [Lücke] wird der Wert [Lücke] an einem Ortsmessgerät, das nach Anwesenheit in dx bei x_0 fragt, abgelesen".

Folgend der Präparation im Zustand wie unter Gl. (15) beschrieben, entwickelt sich der Zustand gemäß der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\Psi} = \hat{H}\Psi$. Zum Zeitpunkt $t = T$ werde nun eine Messung ausgeführt.

(b) Füllen Sie die Lücken in den unter (a) Hinweise gegebenen Sätzen. Bei welcher Messung hängen die Resultate offensichtlich nicht vom Zeitpunkt T ab? Warum nicht?