Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 07 ($20 + \pi^e + e^\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 20.05.19 – Abgabe 28.05.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** (4 Punkte)

Die Bewegungsgleichung einer Punktldadung (Masse m, Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, lautet im nicht-relativistischen Regime

$$m\ddot{\vec{q}} = e\left[\vec{E}(\vec{q},t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q},t)\right] . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\right]^2 + e\Phi(\vec{q},t) \tag{2}$$

Hamiltonfunktion zur Bewegungsgleichung (1) (mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

▷ **Aufgabe 2 (Geschwindigeitsoperator)** (4 Punkte)

In Anlehnung an die klassische Mechanik ist der quantenmechanische Geschwindigkeitsoperator definiert

$$\hat{\vec{v}} := \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\vec{q}}\right] . \tag{3}$$

wobei $\hat{\vec{q}}$ den Ortsoperator und $\hat{H}$ den Hamiltonoperator bezeichnet. Für ein Teilchen der Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}},t)\right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{q}},t) . \tag{4}$$

worin $\Phi, \vec{A}$ das Potential des Feldes.

Zeigen Sie

(a)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\right] . \tag{5}$$

(b)

$$[\hat{q}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar}{m}\delta_{ij} \tag{6}$$

worin $i, j = x, y, z$ kartesischer Index.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

(c)
$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar e}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k \tag{7}$$

wobei ϵ_{ijk} den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor bezeichnet, und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (Magnetfeld).

Bemerkung: Zuweilen wird diese Identität in der Form $\hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{v}} = i\hbar e/(m^2)\vec{B}$ geschrieben.

▷ **Aufgabe 3 (W'keitsstromdichte Punktladung)** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine Punktladung im elektromagnetischen Feld gilt die Kontinuitätsgleichung $\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ mit einer W'keitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right] - \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{x},t)|\psi(\vec{x},t)|^2\,. \tag{8}$$

Frage: ist die W'keitsstromdichte eichinvariant (sieht ja nicht so aus ...)?

▷ **Aufgabe 4 (Paulimatrizen und Spin-**$1/2$**)*** (8 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch
$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i\,, \qquad i = x, y, z \tag{10}$$
definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_i$, bzw. $\hat{s}_i$, als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_i$, $i = x, y, z$ gilt:
$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\hat{\sigma}_k\,, \qquad \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = i\hat{1}\,, \qquad (ijk = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{11}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:
$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{12}$$
wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet. Was sind denn die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(e) Nun seien $\vec{a}, \vec{b}$ Euklidische Vektoren (nicht unbedingt Einheitsvektoren). Zeigen Sie

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \hat{\vec{\sigma}} \,. \tag{13}$$

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ **Aufgabe 5 (Bewegung im Magnetfeld/Quanten-Hall-Effekt)** (e^π Punkte)

`[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung ...]`

Wir betrachten ein geladenes Punktteilchen (Masse m, Ladung e) im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}})\right]^2 \,, \tag{14}$$

mit $\frac{\partial}{\partial \hat{\vec{q}}} \times \vec{A} = \vec{B}$.

(a) Stellen Sie die *klassischen* Bewegungsgleichungen auf, lösen Sie sie, und verifizieren Sie, daß sich das Teilchen mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{eB}{m} \tag{15}$$

auf einer Kreisbahn bewegt. Was ist die Energie des Teilchens?

(b) Definieren Sie Operatoren

$$\hat{X}_0 = \hat{q}_x + \hat{v}_y/\omega_\mathrm{c} \,, \tag{16}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{q}_y - \hat{v}_x/\omega_\mathrm{c} \,, \tag{17}$$

wobei $\hat{\vec{v}}$ der in Aufgabe (1) definierte Geschwindigkeitsoperator ist. Beweisen Sie

$$\left[\hat{H}, \hat{X}_0\right] = 0 \,, \tag{18}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{Y}_0\right] = 0 \,, \tag{19}$$

$$\left[\hat{X}_0, \hat{Y}_0\right] = -i\frac{e}{|e|}a_\mathrm{m}^2 \,, \tag{20}$$

wobei $a_\mathrm{m} = [\hbar/(|e|B)]^{1/2}$ die sog. *magnetische Länge* bezeichnet. Was ist die physikalische Bedeutung der Operatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$?

Hinweis: Die physikalische Bedeutung erkennen Sie nach einem kurzen Blick auf Ihre Lösung von (a). Übrigens: X_0, Y_0 nennt man auch *Orbitzentrumskoordinaten* …

(c) Beweisen Sie die Unschärferelation der Orbitzentrumskoordinaten

$$\delta X_0 \delta Y_0 \geq \frac{1}{2} a_{\mathrm{m}}^2 \,. \tag{21}$$

Behalten Sie in Erinnerung: ein geladenes Teilchen im Magentefeld beansprucht eine Fläche umgekehrt proportional dem Magnetfeld.

(d) Drücken Sie den Hamiltonoperator (14) durch den in Aufgabe (1) definierten Geschwindigkeitsoperator aus. Benutzen Sie die Algebra des Geschwindigkeitsoperators um die Eigenwerte von $\hat{H}$ zu bestimmen,

$$E_n(v_z) = (n + 1/2)\hbar|\omega_c| + m v_z^2/2 \,. \tag{22}$$

Hinweis: $\hat{H}$ ist quadratisch in $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ wobei der Kommutator von $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ dem kanonischen Kommutator eines 1D Punktteilchens gleicht ... offensichtlich hat man es bei der Bewegung in der xy-Ebene formal mit einem harmonischen Oszillator zu tun.

(e) Um auch die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ zu bestimmen wählen Sie die sog *Landau-Eichung* $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$. Lösen Sie die dazugehörige stationäre Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung.

(f) In der Landau-Eichung lauten die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\psi(x,y,z) = \mathcal{N} e^{i(k_x x + k_z z)} \, H_n((y-y_0)/a_{\mathrm{m}}) \, e^{-(y-y_0)^2/a_{\mathrm{m}}^2} \,, \tag{23}$$

wobei $y_0 = -\hbar k_x/(eB)$, $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante, und H_n Hermitepolynom. Was ist die Bedeutung der Quantenzahlen k_x, k_z, n?

Hinweis: Studieren Sie die Orbitzentrumsoperatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$ in der Landau-Eichung ...

(g) Schätzen Sie die Entartung der Landauniveaus (22) für ein großes System mit periodischen Randbedingungen ab. Vielleicht lassen Sie sich von den in (c) gesammelten Erfahrungen inspirieren ...

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe studierte System spielt eine wichtige Rolle beim sog. *Quanten-Hall Effekt*. Eine gute Einführung vermittelt M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath und J. Hajdu *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1994).

▷ Aufgabe 6 (Diracs Ladungsquantisierungsargument) (π^e Punkte)

`[Auch diese Aufgabe ist freiwillig -- und dient ausschließlich ihrer Bildung ...]`

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigen* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte $\vec{B}_g$; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{24}$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\mathrm{div}\vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \tag{25}$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential $\vec{A}$ geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \mathrm{rot}\vec{A}$. Wegen div rot = 0 wäre in solchen Gebieten dann $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_{\mathrm{I}} = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{26}$$

wie gewünscht $\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{I}} = \vec{B}_g$. Da $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ für $\vartheta \to \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_{I} von $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem $\mathbb{R}^3$ auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{27}$$

$\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{II}} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_{II} aus dem $\mathbb{R}^3$ ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = -\frac{2g}{4\pi}\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi\,. \tag{28}$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = \mathrm{grad}\chi \tag{29}$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi}\varphi\,. \tag{30}$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_{\mathrm{II}} = \exp\left\{-i\frac{2eg}{4\pi\hbar}\varphi\right\}\psi_{\mathrm{I}}\,. \tag{31}$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{32}$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt div$\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktiksumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius div$\vec{B} = 0$ steht in den Sternen. Hätten Sie eine Idee, wie die Maxwell'sche Theorie zu erweitern wäre, wenn sich herausstellt, dass es tatsächlich magnetische Monopole gibt?