Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 07 ($20 + \pi^e + e^\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 20.05.19 – Abgabe 28.05.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** (4 Punkte)

The equation of motion of a non-relativistic particle (mass m, charge e) in the electromagnetic field reads

$$m\ddot{\vec{q}} = e\left[\vec{E}(\vec{q},t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q},t)\right] . \tag{1}$$

Show that

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\right]^2 + e\Phi(\vec{q},t) \tag{2}$$

is the Hamilton function to (1) (with $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

▷ **Aufgabe 2 (Geschwindigeitsoperator)** (4 Punkte)

In complete analogy to classical mechanics the qunatum mechanical velocity operator is defined

$$\hat{\vec{v}} := \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\vec{q}}\right] . \tag{3}$$

with $\hat{\vec{q}}$ the position operator and $\hat{H}$ the Hamiltonoperator, which for a particle of mass m and charge e reads,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}},t)\right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{q}},t) . \tag{4}$$

where $\Phi, \vec{A}$ the field potential.

Please show, that

(a)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\right] . \tag{5}$$

(b)

$$[\hat{q}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar}{m}\delta_{ij} \tag{6}$$

with $i, j = x, y, z$ cartesian index.

(c)

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar e}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k \tag{7}$$

with ϵ_{ijk} the completely antisymmetric symbol, and $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ the magnetic induction.

Remark: Frequently this identity is written in the form $\hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{v}} = i\hbar e/(m^2)\vec{B}$.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3 (W'keitsstromdichte Punktladung)** (4 Punkte)

Show that for a point charge in the electromagnetic field the continuity equation $\dot{\varrho}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ holds for a probability current density

$$\vec{j}(\vec{x},t)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right]-\frac{e}{m}\vec{A}(\vec{x},t)|\psi(\vec{x},t)|^2\,. \tag{8}$$

Question: is the probability current density gauge invariant? (it does'nt look like ...)?

▷ **Aufgabe 4 (Paulimatrizen und Spin-**$1/2$**)*** (8 Punkte)

The so called *Pauli matrices* are given by

$$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{9}$$

(a) Show that the operators

$$\hat{s}_i=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i\,,\qquad i=x,y,z \tag{10}$$

obey the angular momentum algebra.
Remark: In view of these findings, the tree operators $\hat{\sigma}_i$, or $\hat{s}_i$, respectively, may be viewed the cartesian componente of a Euclidean vector operator $\hat{\vec{\sigma}}$ (or $\hat{\vec{s}}$, respectively), called the *Pauli spin*. The notion "vector operator" derives from the fact, that its components transform like the Cartesian coordinates of a position vector under rotation.

(b) Let the *(square-)length* of a spin be defined $\hat{\vec{s}}^2=\hat{s}_x^2+\hat{s}_y^2+\hat{s}_z^2$. What would be its matrix representation?

(c) Please show: For the cartesian components $\hat{\sigma}_i$, $i=x,y,z$ we have

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j=i\hat{\sigma}_k\,,\qquad \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k=i\hat{1}\,,\qquad (ijk=xyz\text{ zyklisch})\,. \tag{11}$$

(d) Let $\vec{a}$ be a c-number Euclidean vector, and $\hat{\sigma}_a=\vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ the Pauli spin component in direction $\vec{a}$. Please show

$$\hat{\sigma}_a^2=\hat{1}\,,\qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\}=0\,,\qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\}=-1\,, \tag{12}$$

where Tr denotes the *trace*, that is the sum of the diagonal elements, and Det the determinant, that is the product of the eigenvalues. What are the eigenvalues of $\hat{\sigma}_a$?

(e) Let $\vec{a},\vec{b}$ be two c-number Euclidean vector (not necessarily unit vectors). Show

$$[\sigma_a,\sigma_b]=2i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\hat{\vec{\sigma}}\,. \tag{13}$$

(f) With $|0\rangle$, $|1\rangle$ the eigen spinors of $\hat{\sigma}_z$ to eigen values $\sigma=-1$, $\sigma=+1$, and $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ a state spinor. Whats the meaning of the coefficients α, β?

(g) Considering $\hat{\sigma}_x$ in state $|\psi\rangle$ like in (f) – what measurement values can be expected with what probabilities?

(h) For the state specified in (f) a measurement of $\hat{\sigma}_z$ followed by a measurement of $\hat{\sigma}_x$ is analyzed. What could be said about the to-be-expected measurement results?

▷ Aufgabe 5 (Bewegung im Magnetfeld/Quanten-Hall-Effekt) (e^{π} Punkte)

`[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung ...]`

We consider a charged point particle (mass m, charge e) moving in a homogeneous magnetic field $\vec{B} = B\vec{e}_z$. The Hamiltonian reads

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}})\right]^2 , \tag{14}$$

with $\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{q}}} \times \vec{A} = \vec{B}$.

(a) Derive the classical equations of motion, solve them, and verify that the particle is moving on circular orbits with cyclotron frequency

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{eB}{m} \tag{15}$$

What is the energy of the particle?

(b) Define operators

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= \hat{q}_x + \hat{v}_y/\omega_{\mathrm{c}} , && (16)\\ \hat{Y}_0 &= \hat{q}_y - \hat{v}_x/\omega_{\mathrm{c}} , && (17) \end{aligned}$$

with $\hat{\vec{v}}$ the velocity operator from exercise (1). Prove

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}, \hat{X}_0\right] &= 0 , && (18)\\ \left[\hat{H}, \hat{Y}_0\right] &= 0 , && (19)\\ \left[\hat{X}_0, \hat{Y}_0\right] &= -i\frac{e}{|e|}a_{\mathrm{m}}^2 , && (20) \end{aligned}$$

with $a_{\mathrm{m}} = [\hbar/(|e|B)]^{1/2}$ the *magnetic length*. What would be the physical meaning of the operators $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$?

Hint: A quick glance over the solution of (a) reveals the meaning … and thus X_0, Y_0 are dubbed *orbit center coordinates* …

(c) Prove the uncertainty relation of the orbit center coordinates

$$\delta X_0 \delta Y_0 \geq \frac{1}{2}a_{\mathrm{m}}^2 . \tag{21}$$

Keep in mind: a charged particle in a magnetic field takes an area invers proportional to the magnetic field …

(d) Express the Hamiltonian (14) via the velocity operator. Exploit the algebra of the velocity in order to derive the eigen values of $\hat{H}$,

$$E_n(v_z) = (n + 1/2)\hbar|\omega_c| + mv_z^2/2\,. \tag{22}$$

Hint: $\hat{H}$ is quadratic in $\hat{v}_x$ and $\hat{v}_y$ with their commutator being identical to the canonical commutator of a 1D point particle ... evidently the motion in the xy-plane can be mapped on a 1D harmonic oscillator ...

(e) In order to derive the eigen function of $\hat{H}$, choose the *Landau-Gauge* $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$. Solve the eigenvalue problem of the stationary Schrödinger equation.

(f) IN the Landau-Gauge the solutions read

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{N}e^{i(k_x x + k_z z)}\, H_n((y - y_0)/a_\mathrm{m})\, e^{-(y-y_0)^2/a_\mathrm{m}^2}\,, \tag{23}$$

with $y_0 = -\hbar k_x/(eB)$, $\mathcal{N}$ a normalization, and H_n Hermite polynome. What is the meaning of the quantum numbers k_x, k_z, n?

Hint: Study the orbit center operators in the Landau-Gauge ...

(g) Estimate the degeneracy ot the Landau-Levels (22) for a large system with periodic boundary conditions ...

Remark: The system studie here plays some role for the so called *Quantum-Hall Effect*. For some introduction see M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath und J. Hajdu *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1994).

▷ **Aufgabe 6 (Diracs Ladungsquantisierungsargument)** (π^e Punkte)

`[Auch diese Aufgabe ist freiwillig -- und dient ausschließlich ihrer Bildung ...]`

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigen* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte $\vec{B}_g$; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{24}$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\mathrm{div}\vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \tag{25}$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential $\vec{A}$ geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \mathrm{rot}\vec{A}$. Wegen div rot = 0 wäre in solchen Gebieten dann $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_{\mathrm{I}} = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{26}$$

wie gewünscht $\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{I}} = \vec{B}_g$. Da $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ für $\vartheta \to \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_{I} von $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem $\mathbb{R}^3$ auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{27}$$

$\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{II}} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_{II} aus dem $\mathbb{R}^3$ ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = -\frac{2g}{4\pi}\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi\,. \tag{28}$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = \mathrm{grad}\chi \tag{29}$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi}\varphi\,. \tag{30}$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_{\mathrm{II}} = \exp\left\{-i\frac{2eg}{4\pi\hbar}\varphi\right\}\psi_{\mathrm{I}}\,. \tag{31}$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n\,, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{32}$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktiksumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ steht in den Sternen. Hätten Sie eine Idee, wie die Maxwell'sche Theorie zu erweitern wäre, wenn sich herausstellt, dass es tatsächlich magnetische Monopole gibt?