

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 08 (20 + π Punkte)¹

Ausgabe 27.05.19 – Abgabe 04.06.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Spinmatrizen)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die drei sog. Spin-Matrizen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

der Drehimpulsalgebra genügen. Was haben die mit der Darstellung des Bahndrehimpulses auf dem Vektorraum(!) der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ zur Quantenzahl $\ell = 1$ zu tun? Vielleicht studieren Sie mal die $Y_{\ell m}$ -Matrixelemente des Bahndrehimpulses zur Drehimpulsquantenzahl $\ell = 1 \dots$

▷ Aufgabe 2 (Noch mehr Spinologie ...)*

(6 Punkte)

Drehungen des “Präparators” des Spins von Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen werden durch eine unitären Operator beschrieben,

$$\hat{U}_{\phi \vec{n}} := \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \phi \vec{n} \cdot \hat{\vec{s}} \right\} \quad (2)$$

wobei \vec{n} Euklidischer Einheitsvektor (Richtung der Drehachse), ϕ reell der Drehwinkel, und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

(a) Wie lautet \hat{U} in der Standard-Matrixdarstellung?

Hinweis: Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e -Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$?

(b) Berechnen Sie $\hat{U}_{\phi \vec{n}}^\dagger \hat{\vec{s}} \hat{U}_{\phi \vec{n}}$. Warum dürfen Sie hier schließen, dass der Spin zu Recht mit einem “Euklidischen Pfeil” gekrönt wurde?

▷ Aufgabe 3 (Addition von Bahndrehimpuls und Spin- $\frac{1}{2}$)

(12 Punkte)

[Klausurelevant? Nicht in dieser Form – aber die Kopplung $\ell = 1$ an $s = 1/2$ könnte durchaus “dran” kommen ...]

Wird beim Wasserstoffproblem auch der Spin der Elektrons berücksichtigt ist mit

$$\hat{\vec{j}} := \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{s}} \quad (3)$$

der Gesamtdrehimpuls des Elektrons verabredet.

¹Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Gemeinsame Eigenzustände zu \hat{j}^2 , \hat{j}_z , $\hat{\ell}^2$ und \hat{s}^2 werden notiert $|jm_jls\rangle$, wenn nötig Komma zwischen den Einträgen, worin Quantenzahlen j, m_j, ℓ und s definitiosgemäß

$$\begin{aligned} \hat{j}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm_jls\rangle, & \hat{j}_z|jm_jls\rangle &= \hbar m_j|jm_jls\rangle, \\ \hat{\ell}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell+1)|jm_jls\rangle, & \hat{s}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|jm_jls\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

Der Wert von s liegt natürlich fest, $s = \frac{1}{2}$, der Wertebereich von ℓ ist variabel $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Zu jedem ℓ (mit Ausnahme $\ell = 0$) gibt es zwei mögliche Werte $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Für $\ell = 0$ gibt es nur ein $j = \frac{1}{2}$.

Das Ziel ist es, die $|jm_jls\rangle$ durch eine Linearkombination der Produktzustände $|\ell m_\ell; s\mu\rangle := |\ell m_\ell\rangle \otimes |s\mu\rangle$ auszudrücken, wobei Quantenzahlen m_ℓ und μ definitionsgemäß $\hat{\ell}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar m_\ell|\ell m_\ell s\mu\rangle$, $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$, und $\hat{s}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar \frac{\mu}{2}|\ell m_\ell s\mu\rangle$ mit $\mu = \pm 1$. In jedem Fall $m_j = -j, -j+1, \dots, j$.

Zeigen Sie: Für $\ell = 1, 2, \dots$

$$|\ell \pm \frac{1}{2}, m_j; \ell, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \mp \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\pm\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \pm \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\mp\rangle \quad (5)$$

und für $\ell = 0$

$$|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}; 0\frac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}\pm\rangle. \quad (6)$$

Spektroskopisch notiert man die m_j -Multipletts in der Form $n\ell_j$, etwa $2p_{\frac{1}{2}}$ oder $2p_{\frac{3}{2}}$. In der Grobstruktur ("Kepler-Atom") sind diese beiden Niveaus anenergetisch entartet. Wird die Wechselwirkung des Spins mit dem Bahndrehimpuls in der Feinstruktur erfasst, wird diese Entartung aufgehoben.

▷ **Aufgabe 4 (Wohnst-Du-noch)**

(π Punkte)

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.