

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 09 (20 Punkte)

Ausgabe 03.06.19 – Abgabe 11.06.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** [Ritz'sches Theorem] (6 Punkte)

Beweisen Sie das Ritz'sche Theorem wonach das Funktional $E[\psi] = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ genau dann stationär, $\delta E[\psi] = 0$, wenn $\psi = \psi_0$ Eigenvektor von \hat{H} , etwa $\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0$. Schließen Sie aus diesem Theorem $E[\psi] \geq E_0$, wobei E_0 die Grundzustandsenergie. Stöbern Sie im Lehrbuch und geben eine Anwendung an.

▷ **Aufgabe 2 (Grundzustandsenergie mittels Ritz)*** (6 Punkte)

Schätzen Sie mittels Ritz'schem Theorem die Grundzustandsenergie eines Elektrons im Coulombfeld des Z -fach geladenen Kern ab. Benutzen Sie als Variationsansatz $\propto e^{-\kappa r}$ mit κ Variationsparameter. Wie vergleicht sich Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert?

▷ **Aufgabe 3 (Hyperfeinstruktur)** (8 Punkte)

[Was die HFS ist, und wo sie herkommt, sollte man wissen ...]

In der Hyperfeinstruktur (HFS) wird die Wechselwirkung zwischen dem Elektronenspin und dem Protonenspin (Fall: atomarer Wasserstoff) berücksichtigt. Das magnetische Moment des Protons, $\vec{\mu}_p = \gamma_p \vec{s}_p$, $\gamma_p \approx 2,79 e_0/m_p$, erzeugt am Ort \vec{x} ein Magnetfeld

$$\vec{B}_p(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\vec{\mu}_p - 3 \frac{(\vec{\mu}_p \cdot \vec{x}) \vec{x}}{r^2} \right) + \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mu}_p \delta(\vec{x}). \quad (1)$$

wobei angenommen wurde, dass das Proton im Ursprung plaziert ist, und $r = |\vec{x}|$.

Die Einstellenergie des magnetischen Moments des Elektrons, $\mu_e = -\gamma_e \vec{s}_e$, $\gamma_e = e_0/m_e$ (Annahmen: $g = 2$), lautet

$$\hat{H}_{\text{HFS}} = -\hat{\mu}_e \cdot \vec{B}_p(\hat{q}) \quad (2)$$

Um den Effekt auf den Grundzustand von Wasserstoff abzuschätzen behandeln wir \hat{H}_{HFS} hinsichtlich der Translationsfreiheitsgrade des Elektrons in erster Ordnung Störungstheorie, behalten aber die Spinfreiheitsgrade bei. Bei der Mittlung des Magnetfeldes über die Gewichtsfunktion $|\psi_{100}(\vec{x})|^2$ trägt nur der Kontaktterm bei (warum?), und daher

$$\hat{H}_{\text{HFS}} = -\frac{2\mu_0}{3} \hat{\mu}_e \hat{\mu}_p |\psi_{100}(0)|^2 = \frac{A}{\hbar^2} \hat{s}_e \cdot \hat{s}_p \quad (3)$$

worin

$$A = \frac{16}{3} \times 2,79 \frac{m_e}{m_p} \alpha^2 E_{\text{Ry}} \approx 5,87 \times 10^{-6} \text{eV}. \quad (4)$$

bzw $\nu = A/h \approx 1417 \text{MHz}$ oder $\lambda = c/\nu \approx 21 \text{cm}$.

- (a) Zeigen Sie dass der Hamiltonoperator (3) zu Eigenwerten und Eigenzuständen Anlass gibt

$$\begin{aligned} E_+ &= E_0 + A/4 && \text{im Triplet } |S = 1, M\rangle, M = -1, 0, 1, \\ E_- &= E_0 - 3A/4 && \text{im Singlet } |S = 0, M = 0\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

- (b) In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ spaltet das Triplet auf und das Singlet wird verschoben. Berechnen Sie – exakt! – diese Aufspaltung/Verschiebung als Funktion der Magnetfeldstärke (die Kopplung des Protonenspins an das Feld dürfen Sie dabei getrost vernachlässigen. Warum?). Machen Sie sich ein Bild (Energiewerte vs B), identifizieren das “Zeeman-Regime” kleiner Feldstärken und das Paschen-Back Regime großer Feldstärken.

Bemerkung: Die Hyperfeinstruktur im Grundzustand von atomarem Wasserstoff spielt in der Astrophysik eine wichtige Rolle (21cm-Linie), und wird gerne für Tests der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet (gravitative Rotverschiebung). Der Hyperfeinübergang im Cs-133 Isotop dient der Definition der Sekunde: eine Sekunde sind genau 9 192 631 770 Perioden der entsprechenden Linie. Der Übergang ist übrigens äußerst schwach, da elektrisch Dipol-verboten, mit einer Lebensdauer $\sim 3,5 \times 10^{14} \text{sec} \sim 10^7 \text{Jahre}$ (aufgrund magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolübergänge).

Im übrigen bezieht sich die Platte der Pionier 10 Mission, die die Nachricht von unserer Zivilisation ins All trägt, auf die Hyperfeinstruktur von atomarem Wasserstoff um eine Längen und Zeitskala zu kommunizieren ...