Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2019) -

Übungsblatt 11 ($10 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 17.06.19 – Abgabe 25.06.19 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (HO mit Heisenberg) (8 Punkte)

[“Pflicht” und klausurrelevant . . .]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld) (12 Punkte)

Das “Zwei-Zustands System”, auch genannt “2-Niveau Atom”, “Spin im Magnetfeld” oder “qubit” ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma}^\dagger \tag{2}$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

(a) Ich behaupte, die durch $\hat{H}$ beschriebene Dynamik haben Sie schon mal analysiert. Wann war das, und in welchem Kontext?

(b) Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^\dagger$?

(c) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft . . .

(d) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit "ungestörtem" Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t)}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \tag{3}$$

(e) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.

(f) Zum Hamiltonoperator $\tilde{H}$ kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum …

▷ **Aufgabe 3 (Zenos Paradox)** (π Punkte)

Zeno von Elea, ein Vorsokratiker, ist bekannt für seine Paradoxe. Das bekannteste ist vermutlich "Achilles und die Schildkröte": bei einem Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte, bei dem der Schildkröte aus Gründen der Fairneß ein gewisser Vorsprung eingeräumt wird, kann Achilles die Schildkröte nie einholen, denn wann immer er da ankommt, wo die Schildkröte gerade noch war, ist sie schon weiter. Vermutlich haben Sie auch schon gelernt, dass spätestens seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung das Paradox keines mehr ist.

Ein anderes Paradox betrifft fliegende Pfeile – nach Zeno eine Unmöglichkeit: in jedem Moment seines Fluges nimmt der Pfeil einen bestimmten, exakt umrissenen Ort ein. Er ist dort in Ruhe, denn wer sich an *einem* Ort befindet kann sich schließlich nicht bewegen (Bewegung ist "Betreten" oder "Verlassen" eines Ortes, nicht "Befinden"). Da sich also der Pfeil zu jedem Moment offensichtlich in Ruhe befindet, kommt er überhaupt nicht vom Fleck.

Von Pfeilen befreit, und für die Belange der Quantenmechanik formuliert, lautet Zenos Paradox: jeglicher Versuch, die Dynamik eines Systems kontinuierlich zu beobachten, friert das System ein.

Dass die Quantenmechanik genau das liefert soll hier eingesehen werden. Dazu nehmen wir ein resonant getriebenes Zwei-Niveau System (Hamilton wie in Blatt 09, Aufgabe 2). Das System sei zu einem Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|g\rangle$. Zur Zeit t wird eine Zustandsmessung gemacht. Unter der Voraussetzung, dass im Zeitintervall $[0, t]$ keine Messung stattfand, ist dann die Besetzungsw'keit des Grundzustands, daran sei erinnert, gegeben $P_g(t) = \cos(\Omega_0 t)$ entsprechend die Besetzungw'keit des angeregten Zustandes $P_e = 1 - \cos(\Omega_0 t)$.

Was passiert eigentlich, wenn Zustandsmessungen zu Zeiten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \ldots, N$ mit $\Delta t = t/N$ vorgenommen werden? Bestätigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ (also "kontinuierlich nachgucken, in welchem Zustand sich das Atom befindet") das Atom – trotz Antrieb! – im Grundzustand eingefroren ist.

Das "Quanten-Zeno" Paradox – angelsächsisch formuliert "A watched pot never boils" – ist kein Paradox, sondern Wirklichkeit! Dass Zwei-Niveau Systeme sehr wohl im angeregten

Zustand sein können befindet sich aber nicht im Widerspruch zu dieser Wirklichkeit. Man muss sie halt nur "in Ruhe lassen" – sprich: eben nicht an ein "permanent-nachgucken-Instrument" koppeln ...

Hinweis: Wenn Sie mit der Aufgabe fertig sind: nutzen Sie doch mal irgendeine Suchmaschine, Stichwort "Zeno Paradox", oder gehen gleich auf Wikipedia. Besser noch: gehen Sie auf die Uni-Seite der Bibliothek, dort auf e-journals, natürlich Physik, klicken sich auf Physical Review A durch, und laden einfach herunter: "Quantum Zeno effect", W. M. Itano et al., Phys. Rev A**41**, 2295 (1990). Da lernen Sie dann, wie man ein "permanten-nachgucken-Instrument" im Labor realisieren kann. Anschließend erfreuen Sie sich an einer Debatte über die Grundlagen der Quantenmechanik: "Comment on 'Quantum Zeno effect' " von L. E. Ballentine, Phys. Rev. A**43**, 5165 (1991); "Reply to 'Comment on Quantum Zeno effect' ' " von W. M. Itano et al, Phys. rev. A**43**, 5168 (1991); "Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet" von V. Frerichs und A. Schenzle, Phys. Rev. A**44**, 1962 (1991).