Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2019
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 3 Ausgabe: 24. April 2019
Diskussion: 10. Mai 2019

Aufgabe 3.1 – Stimulierte und spontane Emission à la Einstein (10 Punkte)

A. Einstein hat in seiner berühmten Arbeit von 1917 'Zur Quantentheorie der Strahlung' [*Phys. Zeitschr.* **18** (1917) 121, online bei ing-buero-ebel.de] die A- und B-Koeffizienten eingeführt. Dies sind Raten, die in folgendes System von Differentialgleichungen eingehen:

$$\dot{N}_e = BIN_g - (A + BI)N_e \tag{3.1}$$

$$\dot{N}_g = (A + BI)N_e - BIN_g \tag{3.2}$$

$$\dot{I} = BN_eI + AN_e - BN_gI \tag{3.3}$$

(i) Die Bedeutung dieser Größen ist: N_e (N_g) = Anzahl von Atomen im Zustand $|e\rangle$ (im Zustand $|g\rangle$); I = Anzahl von Photonen. Nehmen Sie, dass dies ein einfaches Modell eines Lasers ist (so hätte Einstein das sicher nicht verstanden) und beschreiben Sie in Worten die physikalischen Prozesse, die die Koeffizienten A und B beschreiben.

(ii) Nehmen Sie an, dass die Besetzungen N_e und N_g konstant sind. Unter welchen Bedingungen wird die Zahl der Photonen anwachsen? Wie ändert sich die Antwort, wenn Sie der Differentialgleichung für I einen Term $-\kappa I$ hinzufügen? So finden Sie die 'Laserschwelle'.

(iii) Leider kann die Laserschwelle niemals erreicht werden, wenn die Atome ein 'geschlossenes Zwei-Niveau-System' bilden. Überprüfen Sie diese Aussage, indem Sie für einen festen Wert von I die stationäre Lösung für N_e und N_g berechnen.

(iv) Ein einfaches Modell, in dem das Lasen funktioniert, ergänzt die Gleichung für $\dot{N}_e$ um einen Term R_e und die für $\dot{N}_g$ um einen Term $-\gamma_g N_g$. Wie ändert sich die stationäre Lösung von (iii)?

Aufgabe 3.2 – Mastergleichungen für den Laser (10 Punkte + 5 Bonuspunkte)

In der Vorlesung haben wir die Quantentheorie des Lasers mit Hilfe von Master-Gleichungen in Lindblad-Form formuliert. Ein Beispiel wäre folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\, \rho] + \kappa\left(a\rho a^\dagger - \tfrac{1}{2}\left\{a^\dagger a,\, \rho\right\}\right) \\ &\quad + \left(L\rho L^\dagger - \tfrac{1}{2}\left\{L^\dagger L,\, \rho\right\}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei der Anti-Kommutator zweier Operatoren wie folgt definiert ist

$$\{A,\, B\} = AB + BA \tag{3.5}$$

(1) Eine einfache Wahl für ein Laser-Modell benutzt den Operator $L = \sqrt{G}\, a^\dagger$. Zeigen Sie, dass κ und G als Raten für den Verlust und den Gewinn von Photonen gelesen werden können, indem Sie aus (3.4) eine Differentialgleichung für den Erwartungswert der Photonenzahl ausrechnen:

$$\langle \hat{n} \rangle = \mathrm{tr}(a^\dagger a \rho)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{n} \rangle = \mathrm{tr}\Big(a^\dagger a \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\Big) \tag{3.6}$$

Wenn Sie sich wundern, dass diese Gleichung keine stationäre Lösung oberhalb der Laserschwelle (für $G > \kappa$) hat – genau das würde ich auch erwarten.

Sie dürfen Gl.(1.12) aus Blatt 1 für den Erwartungswert einer Observablen A verwenden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A \rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle [H,\, A] \rangle + \sum_k \tfrac{1}{2}\big\langle \big[L_k^\dagger,\, A\big] L_k \big\rangle + \tfrac{1}{2}\big\langle L_k^\dagger [A,\, L_k] \big\rangle$$

wobei die Notation L_k alle Lindblad-Operatoren zusammenfasst.

(2*) An keiner Stelle liefert die Mastergleichung allerdings einen Hinweis darauf, dass der Laser einen Erwartungswert $\langle \hat{a} \rangle \neq 0$ liefert, obwohl wir das doch die ganze Zeit als typisch für einen Laser verwendet haben. Untersuchen Sie diese Frage, indem Sie eine Gleichung für die 'Kohärenz' $\rho_{01} = \langle 0|\rho|1 \rangle$ finden (so nennt man dieses nicht-diagonale Matrixelement). [*5 Bonuspunkte]

(3) Ein verbessertes Modell berücksichtigt die Tatsache, dass ein typisches aktives Medium mit steigender Intensität für das Laserlicht transparent wird: Grund- und angeregter Zustand sind gleich stark besetzt und stimulierte Emission und Absorption halten sich die Waage. Ein einfache Möglichkeit, dies in eine Lindblad-Form zu gießen, ist der 'nichtlineare Verstärkungs-Operator'

$$L = \sqrt{G}\, a^\dagger \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \hat{n}}} \tag{3.7}$$

der die Wahl von Punkt (1) ersetzt. Versuchen Sie, diese Wahl zu begründen und den Parameter β physikalisch zu interpretieren.

(4) Zeigen Sie, dass die Mastergleichung dann folgenden Satz von Ratengleichungen für die 'Photonenstatistik' $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$ $(n = 0, 1, \ldots)$ liefert

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = \kappa\left((n+1)p_{n+1} - np_n\right) + G\left(\frac{np_{n-1}}{1+\beta(n-1)} - \frac{(n+1)p_n}{1+\beta n}\right) \tag{3.8}$$

In der Vorlesung werden wir die stationäre Lösung dieser Gleichung diskutieren.

Aufgabe 3.3 – Coherent states (15 Punkte + 5 Bonuspunkte)

In quantum optics, coherent (or Glauber) states are very popular. They are used to represent as closely as possible a field mode in a 'classical state'. We use the notation of the lecture with $|\alpha\rangle$ being the normalized eigenstate of a: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

(o*) Show that there are no eigenstates of the creation operator $a^\dagger$. [*5 Bonuspunkte]

(i) Show that the coherent state is given by

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{3.9}$$

and check its normalisation.

(ii) The coherent state has the property that quadrature fluctuations do not depend on the phase angle θ and are at minimum uncertainty:

$$X_\theta := \frac{a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + a^\dagger\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}, \qquad \langle\alpha|\Delta X_\theta^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2} \tag{3.10}$$

(ii) Show that coherent states are not stationary, but evolve under the free field Hamiltonian according to

$$U(t)|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}|\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\rangle \tag{3.11}$$

where ω is the eigenfrequency of the mode. Calculate the phase $\phi(t)$ and find out under which conditions it remains unobservable. Comment on the sentence: 'Coherent states evolve according to the classical equations of motion of an oscillator' by working out the expectations $\langle\alpha(t)|X_\theta|\alpha(t)\rangle$ for $\theta = 0, \pi/2$.

(iv) Coherent states are not orthogonal (why?): show that for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\text{not orthogonal:} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\alpha,\beta)} \exp(-\tfrac{1}{2}|\alpha-\beta|^2) \tag{3.12}$$

where the phase $\phi(\alpha, \beta) = \mathrm{Im}(\alpha^* \beta)$ is antisymmetric under the exchange $\alpha \leftrightarrow \beta$ ('as it must be' – why?).

(v) Coherent states are 'overcomplete': using an integral $\mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (with $\alpha = x + \mathrm{i}y$) in the complex plane, show that

$$\text{overcomplete:} \quad \int \mathrm{d}^2\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \pi \mathbb{1} \tag{3.13}$$

The word 'overcomplete' appears because of the factor $\pi > 1$.

Hint. Polar coordinates in the complex plane $\alpha = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ are very useful here.

(vi) The Glauber displacement operators $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ have been given this name because they 'displace' the mode operators by a complex number:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \tag{3.14}$$

Prove this equation by replacing $\alpha \mapsto \alpha t$ and deriving a differential equation for both sides with respect to t.

(vii) Using the previous results and the Campbell-Baker-Hausdorff identity

$$\mathrm{e}^{A+B} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]} = \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{B}\,, \qquad \text{provided } [A, B] \text{ commutes with } A \text{ and } B, \tag{3.15}$$

prove the following formulas for the displacement operators

$$\begin{aligned}
D(\alpha)|0\rangle &= |\alpha\rangle && (3.16)\\
D^\dagger(\alpha) &= D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha) && (3.17)\\
D(\alpha) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a) && (3.18)\\
D(\alpha) D(\beta) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\alpha,\beta)} D(\alpha + \beta) && (3.19)\\
\exp(\mathrm{i}\theta a^\dagger a) D(\alpha) \exp(-\mathrm{i}\theta a^\dagger a) &= D(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \quad \text{or} \quad D(\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) && (3.20)\\
D^\dagger(\alpha) \exp(\mathrm{i}\theta a^\dagger a) D(\alpha) &= \exp[\mathrm{i}\theta(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha)] && (3.21)
\end{aligned}$$