Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2019

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4 Ausgabe: 15. Mai 2019
Diskussion: 24. Mai 2019

Aufgabe 4.1 – Wigner-Funktion (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Verbindungen zwischen der P- und Q-Funktion erwähnt, die man auch über ihre Fourier-Transformierten in der Phasenraum-Ebene ausdrücken kann. Die Ergebnisse aus Blatt 03 dürfen verwendet werden.

Wir definieren eine weitere Phasenraum-Verteilung, genannt Wigner-Funktion $W(\alpha) = W(q, p)$ durch die folgende Konstruktion ($\alpha = q + \mathrm{i}p$):

$$\chi_W(z) = \langle\Psi|D(z)|\Psi\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\exp(za^\dagger - z^*a)|\Psi\rangle\langle\Psi|\right\} \tag{4.1}$$

$$W(\alpha) = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2} \exp(z^*\alpha - z\alpha^*)\chi_W(z) \tag{4.2}$$

(1) Drücken Sie $z^*\alpha - z\alpha^*$ durch Real- und Imaginär-Teil aus und begründen Sie, dass Gl.(4.2) eine Fourier-Transformation ist. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ für die Rücktransformation

$$\chi_W(z) = \mathcal{N} \int \mathrm{d}^2\alpha \exp(z\alpha^* - z^*\alpha) W(\alpha) \tag{4.3}$$

(2) Zeigen Sie, dass $W(\alpha)$ reell ist. Wie kann diese Konstruktion auf einen Dichteoperator verallgemeinert werden?

(3) Zeigen Sie, dass die Wigner-Funktion des kohärenten Zustands eine Gauss-Funktion

$$|\Psi\rangle = |\beta\rangle \mapsto W(\alpha) \sim \exp(-\tfrac{1}{2}|\alpha - \beta|^2) \tag{4.4}$$

ist. Vergleichen Sie mit der P- und Q-Funktion des kohärenten Zustands.

(4) Folgern Sie, dass die Wigner-Funktion durch eine Gauß'sche Faltung aus der P-Funktion entsteht:

$$W(\alpha) \sim \int \mathrm{d}^2\beta \, \exp(-\tfrac{1}{2}|\alpha - \beta|^2) \, P(\beta) \tag{4.5}$$

Übersetzen Sie diese Formel in den Fourier-Raum.

(5) Zeigen Sie, dass die Anwendung eines Verschiebe-Operators $D(\beta)$ auf den Zustand $|\Psi\rangle$ die Wigner-Funktion "starr verschiebt". Damit ist gemeint:

$$|\Psi\rangle \mapsto D(\beta)|\Psi\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad W(\alpha) \mapsto W(\alpha - \beta) \tag{4.6}$$

Aufgabe 4.2 – Phasendiffusion (10 Punkte)

Die Verteilungen im Phasenraum, die wir untersucht haben, entwickeln sich auch in der Zeit. Eine typische Gleichung heißt Fokker-Planck-Gleichung. Ein einfaches Beispiel hierfür ist der Prozess "Phasendiffusion", mit dem man die Linienbreite eines Lasers modellieren kann. Wir betrachten ein oszillierendes Signal, dessen Phase $\phi = \phi(t)$ langsam und zufällig hin- und her-driftet. Die Amplitude des Laserfelds wird in diesem Modell nur durch den Parameter ϕ bestimmt.

(1) Schreiben Sie einen Satz über die Bedeutung der Verteilungsfunktion $P(\phi, t)$. Wählen Sie ein Beispiel für die Anfangsverteilung $P(\phi, 0)$, skizzieren Sie $P(\phi, t)$ und begründen Sie das Verhalten für große Zeiten

$$\lim_{t\to\infty} P(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \tag{4.7}$$

(2) Die Zufallsbewegung der Phase kann durch eine Drift-Diffusions-Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \omega_L \frac{\partial P}{\partial \phi} = D \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \tag{4.8}$$

Überprüfen Sie, dass ω_L die Dimension einer Frequenz und D die eines Diffusionskoeffizienten haben. (Vorsicht: welche Größe diffundiert?) Transformieren Sie in ein "mit-bewegtes Bezugssystem" (keine Garantie für Vorzeichen)

$$P(\phi, t) = \tilde{P}(\varphi, t)\,, \quad \phi = \varphi - \omega_L t \tag{4.9}$$

und zeigen Sie, dass die Lösung von Gl.(4.8) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\tilde{P}(\varphi, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n \,\mathrm{e}^{in\varphi - n^2 Dt} \tag{4.10}$$

Wie würden Sie die Koeffizienten w_n bestimmen?

Hinweis. Bei den partiellen Ableitungen müssen Sie aufpassen, weil die Funktionen $P(\phi, t)$ und $\tilde{P}(\varphi, t)$ punktweise gleich sind:

$$\partial_t P(\phi, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{P}(\phi + \omega_L t, t) = \partial_t \tilde{P}(\phi + \omega_L t, t) - \omega_L \partial_\varphi \tilde{P}(\phi + \omega_L t, t)$$

Im letzten Ausdruck sind wieder partielle Ableitungen nach dem zweiten und ersten Argument gemeint.

(3) Schließen Sie daraus, dass für ein Signal mit konstanter Amplitude folgende Mittelwerte gelten

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(0)} \right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t}\, \mathrm{e}^{-Dt} \tag{4.11}$$

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(t)-\phi(0)]} \right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t}\, \mathrm{e}^{-Dt}\,, \qquad t \geq 0 \tag{4.12}$$

Hinweise. Untersuchen Sie zuerst in Gl.(4.10) die Verteilung der Phase zum Zeitpunkt $t = 0$. Zu Gl.(4.11): den Mittelwert als Integral über die Verteilungsfunktion ausschreiben:

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} \rangle = \int \mathrm{d}\phi \, P(\phi, t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \sum_n \int \mathrm{d}\phi \, w_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi + \omega_L t) - n^2 D t} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

Das ϕ-Integral liefert nur einen Wert, falls $n = -1$ ist:

$$= 2\pi w_{-1} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t - Dt}$$

und der Koeffizient w_{-1} wurde in Punkt (2) berechnet.

Gl.(4.12) ist etwas schwieriger: zunächst einmal als Mittelwert über zwei Messungen zu den Zeitpunkten 0 und t schreiben:

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(t) - \phi(0)]} \rangle = \int \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_0 \, P_2(\phi_1, t, \phi_0, 0) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1 - \phi_0)}$$

Die Verteilung P_2 beschreibt das Eintreffen von zwei Ereignissen, was wir noch nicht modelliert haben. Zentrale Idee: wir können sie als Produkt einer bedingten Wahrscheinlichkeit schreiben

$$P_2(\phi_1, t, \phi_0, 0) = W(\phi_1, t | \phi_0, 0) P(\phi_0, 0)$$

$W(\phi_1, t|\phi_0, 0)$ beschreibt also, dass die Phase zum Zeitpunkt t den Wert ϕ_1 hat, unter der Bedingung, dass zu Beginn ($t = 0$) der Anfangswert ϕ_0 vorlag. In diesem Modell nehmen wir an, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit *dieselbe* Fokker-Planck-Gleichung (4.8) erfüllt.[1] Allerdings ist die Anfangsbedingung eine andere:

$$\lim_{t \to 0} W(\phi_1, t | \phi_0, 0) = \delta(\phi_1 - \phi_0)$$

In der Darstellung als Fourier-Summe mit Entwicklungskoeffizienten q_n

$$W(\phi_1, t | \phi_0, 0) = \sum_n q_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi_1 + \omega_L t) - n^2 D t}$$

bekommen wir aus Gl.(4.2):

$$q_n = \int \frac{\mathrm{d}\phi_1}{2\pi} \delta(\phi_1 - \phi_0) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi_1} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi_0}}{2\pi}$$

Der Rest geht ähnlich wie oben: die Integrale über ϕ_1 und ϕ_0 greifen aus den Summen über n jeweils einen Term heraus.

[1] Dies ist eine im klassischen Kontext plausible Annahme. In der Quantenmechanik kann man die Frage stellen, ob die Messung bei $t = 0$ das System stört und die Dynamik sich unterscheidet. In der Praxis taucht ein Problem dann auf, wenn die Messung/Störung zu einem transienten Verhalten führt, das nicht in der ursprünglichen Fokker-Planck-Gleichung "eingebaut" ist, weil z.B. immer von einem Zustand in der Nähe des Gleichgewichts ausgegangen wird.