Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2019

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 5

Ausgabe: 22. Mai 2019
Abgabe: 07. Juni 2019

Aufgabe 5.1 – Rauschende Signale (10 Punkte)

Auf dem web site zur Vorlesung finden Sie ein Python-Skript, das Rausch-Spektren und Korrelations-Spektren berechnet.

(i) Probieren Sie das Skript aus, spielen Sie mit den Zahlenwerten und schreiben Sie ein paar Sätze, was Sie gemacht haben und warum und wie man die geplotteten Daten zu verstehen hat.

(ii) Finden Sie heraus, was das Programm berechnet, führen Sie diese Rechnungen analytisch durch und plotten Sie das Ergebnis zusammen mit den numerischen Daten. Vergleichen Sie die Kurven.

Aufgabe 5.2 – Korrelationen (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir das Wiener–Chintschin-Theorem gesehen,

$$S_a(\omega) = \int \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \langle a^\dagger(t+\tau) a(t) \rangle \,, \tag{5.1}$$

hier in der Form für ein normal geordnetes "Quantensignal" $a(t)$. In dieser Aufgabe spielen wir mit diesen Begriffen an Hand von einfachen Beispielen.

(1) Stellen Sie sich vor, $a(t)$ sei die Amplitude einer sich frei entwickelnden Feldmode, ohne Dämpfung. Schreiben Sie die Lösung für den Heisenberg-Operator $a(t)$ für einen gegebenen "Anfangswert" $a = a(0)$. Zeigen Sie, dass die Autokorrelationsfunktion $\langle a^\dagger(t+\tau) a(t) \rangle$ proportional zur mittleren Photonenzahl $\bar{n}$ (für $t = 0$) ist und dass das Spektrum $S_a(\omega)$ strikt monochromatisch ist.

(2) Mit einem Werkzeug wie der Master-Gleichung können Sie die Entwicklung eines Quantensystems "vorwärts in der Zeit" berechnen – denn in der Tat bewirken Verluste, dass "vorwärts" und "rückwärts" nicht mehr äquivalent sind. Nehmen Sie an, dass Sie die Korrelation $C_a(\tau) = \langle a^\dagger(t+\tau) a(t) \rangle$ für $\tau \geq 0$ kennen und dass diese Korrelationsfunktion "statistisch stationär" ist. (D.h.: sie hängt nicht vom Wert von t ab.) Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$C_a(-\tau) = [C_a(\tau)]^* \,, \tag{5.2}$$

so dass wir haben

$$S_a(\omega) = 2\,\mathrm{Re} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} C_a(\tau)\,. \tag{5.3}$$

(3) Ein typisches Ergebnis einer Master-Gleichung ist eine Korrelationsfunktion, die exponentiell zerfällt:

$$\tau \ge 0: \quad C_a(\tau) = \bar{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c\tau - \kappa\tau}\,. \tag{5.4}$$

Schreiben Sie zwei Sätze mit der Bedeutung der Parameter ω_c und κ und berechnen Sie das Spektrum $S_a(\omega)$. Es enthält ein Maximum (eine "Spektrallinie"): an welcher Position (Frequenz), mit welcher (Linien-)Breite und welcher Form (Linienprofil)?