Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2020

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 2 Ausgabe: 11. Mai 2020

Abgabe: 02. Juni 2020

Aufgabe 2.1 – Lineare kanonische Transformationen (9 Punkte)

Bestimmte unitäre Transformationen wirken auf den kanonischen Operatoren $\{X, P\} = \{Q_1, Q_2\}$ einer Mode, indem sie eine lineare Abbildung induzieren:

$$Q_i \mapsto Q_i' = S^\dagger Q_i S = \alpha_i + \sum_j M_{ij} Q_j \tag{2.1}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie überlegen, welche Eigenschaften die Objekte α_i ("Vektor" $\vec{\alpha}$) und M_{ij} ("Matrix" M) haben müssen, damit die "neuen Operatoren" dieselben Kommutator-Relationen erfüllen, etwa:

$$[X', P'] = \mathrm{i} = [X, P] \tag{2.2}$$

Wir arbeiten hier mit $\hbar = 1$ und dimensionslosen Operatoren Q_i.

(1) Teil-Antwort: $\mathsf{M}\sigma\mathsf{M}^\mathsf{T} = \sigma$ mit $\sigma_{12} = \mathrm{i}$, $\sigma_{ij} = \ldots$ Bestimmen Sie die anderen Matrixelemente und die übrigen Eigenschaften. In der Mathematik wird σ die *symplektische Form* genannt. Matrizen M mit dieser Eigenschaft heißen symplektisch und bilden die symplektische Gruppe Sp(2).

(2) Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Transformationen die Eigenschaft (2.2) haben ($r, \theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} &X \mapsto X\,\mathrm{e}^{-r}\,, \quad P \mapsto P\,\mathrm{e}^{r} \\ &X \mapsto X\cos\theta - P\sin\theta\,, \quad P \mapsto X\sin\theta + P\cos\theta \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3) Rechnen Sie für diese Transformationen das Verhalten der Erzeuger und Vernichter aus, d.h. bestimmen Sie die komplexen Koeffizienten μ und ν

$$a \mapsto \mu\, a + \nu\, a^\dagger \tag{2.4}$$

Überprüfen Sie, dass in beiden Fällen die Beziehung $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ gilt. ("Wie es auch sein muss, weil $[a', a'^\dagger] = 1$ gelten muss" – alles klar?)

(4) Die Wigner-Funktion transformiert sich unter den Transformationen (2.3) wie folgt

$$\begin{aligned} W(x,p) &\mapsto W(x\,\mathrm{e}^{r}, p\,\mathrm{e}^{-r}) \\ W(x,p) &\mapsto W(x\cos\theta + p\sin\theta, -x\sin\theta + p\cos\theta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Machen Sie einen Plot oder beschreiben Sie in Worten, was mit der Wigner-Funktion im Phasenraum geschieht. Was geschieht, wenn Sie die beiden Transformationen hintereinander ausführen?

Aufgabe 2.2 – Photonenstatistik (9 Punkte)

Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist ein einfaches Modell, um eine Lasermode zu beschreiben, die sich stationär "eingeschwungen" hat. Sie erinnern sich an die fundamentale Eigenschaft: $|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand zum Operator a mit Eigenwert α.

(1) Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle X_\theta \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$, sowie $\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle$ im kohärenten Zustand. Hier ist

$$X_\theta = \frac{a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + a^\dagger\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}} \tag{2.6}$$

ein Quadraturoperator für einen beliebigen Phasenwinkel θ.

(2) Die Photonenstatistik p_n ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, in der Lasermode genau n Photonen zu finden. Zeigen Sie, dass ihr Mittelwert $\bar{n}$ und ihre Varianz $(\Delta n)^2$ wie folgt zusammenhängen:

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} \tag{2.7}$$

(3) Zeigen Sie, dass die Photonenstatistik eine Poisson-Verteilung ist

$$p_n = \frac{(\bar{n})^n}{n!}\mathrm{e}^{-\bar{n}} \tag{2.8}$$

(4) Leonard Mandel hat zur Charakterisierung der Photonenstatistik den Mandel-Parameter eingeführt

$$Q = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n}-1)\rangle - \langle \hat{n}\rangle^2}{\langle \hat{n}\rangle} \tag{2.9}$$

In der Theorie der Photodetektion gibt $\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle$ die Rate an, zwei Photonen (praktisch gleichzeitig) zu detektieren. Beschreiben Sie vor diesem Hintergrund die physikalische Bedeutung des Mandel-Parameters. Zeigen Sie, dass im kohärenten Zustand $Q = 0$ gilt. Lasermoden mit $Q < 0$ werden als "sub-Poisson" und mit $Q > 0$ werden als "super-Poisson" bezeichnet: warum?

(5) Berechnen Sie Q für einen Anzahl-Zustand.

Aufgabe 2.3 – Journal templates in physics (2 Punkte)

Scientific journals propose to their authors "templates" for writing papers. Check out the journals listed below and find their templates on the web.

Each student takes a different template and completes it with the following information: Title, author, affiliation, abstract and a bibliography list with three items. If you need inspiration, just produce a fake copy of the paper by Dirac (1927) on the quantum theory of emission and absorption of radiation (photons). Print out the result and hand it in with the rest of your problem solutions. For one of the problems in this semester, you will be asked to hand in a solution in a similar electronic form (this time under your name).

Nature Photonics, Europhysics Letters, Physics Letters A, Optics Letters, Physical Review A, Journal of Physics B, European Physical Journal D, Journal of Optics, Journal of modern Optics, Optics Communications, Journal of the Optical Society of America B, Annalen der Physik (Berlin), Annals of Physics (N.Y.)

[Bonus points if your bibliography is "correctly" formatted.]

Aufgabe 2.4 – Laser feeling (10 Punkte)

A typical laser is based on the following elements: a cavity for the laser mode, an active medium, a mechanism for pumping the medium, an optical system to shape the laser beam.

(1) Look up in a 'laser catalogue' the product ('quality factor' Q) between the resonance frequency ω_c and the 'photon lifetime' τ in the cavity. In the lecture, we shall use $\kappa = 1/\tau$ as 'cavity decay rate'.

(2) Find typical values for the ratio between the input power (needed for pumping the active medium) and the optical output power. This 'efficiency' η is often not very large – this is one of the reasons why laser-induced fusion is probably not a very efficient way of producing energy, for example.

(3) Estimate the product of lifetime τ and the flux of photons (photons per second) in the laser beam. We shall see that this is a good estimate for the photon number $\langle n \rangle$ in the cavity – a typical value? For a 'microlaser' or 'micro maser' (experiments by Nobel prize winner Serge Haroche in Paris), this number is small.

(4) Try to find information about the fluctuations (stability) of the laser beam power. What physical quantities are used to describe this? We shall be interested in the lecture in the standard deviation Δn of the photon number inside the laser cavity: think how one could translate the catalogue information into the number Δn.