Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2020

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 3 Ausgabe: 03 Juni 2020

Diskussion: 23 Juni 2020

Aufgabe 3.1 – Stimulierte und spontane Emission à la Einstein (10 Punkte)

A. Einstein hat 1917 in der Arbeit 'Zur Quantentheorie der Strahlung' [*Phys. Zeitschr.* **18** (1917) 121, online bei ing-buero-ebel.de] die A- und B-Koeffizienten eingeführt. Dies sind Raten, die in folgendes System von Differentialgleichungen eingehen:

$$\dot{N}_e = BIN_g - (A + BI)N_e \tag{3.1}$$

$$\dot{N}_g = (A + BI)N_e - BIN_g \tag{3.2}$$

$$\dot{I} = BN_eI + AN_e - BN_gI \tag{3.3}$$

Die Bedeutung dieser Größen ist: N_e (N_g) = Anzahl von Atomen im Zustand $|e\rangle$ (im Zustand $|g\rangle$); I = Anzahl von Photonen. Wir werden dies hier als ein einfaches Modell eines Lasers auffassen (so hätte Einstein das sicher nicht verstanden). Die Koeffizienten beschreiben die Prozesse spontane Emission (A) sowie Absorption und stimulierte Emission (B).

(1) Nehmen Sie an, dass die Besetzungen N_e und N_g konstant sind. Unter welchen Bedingungen wird die Zahl der Photonen anwachsen? Wie ändert sich die Antwort, wenn Sie der Differentialgleichung für I einen Term $-\kappa I$ hinzufügen? So finden Sie die 'Laserschwelle'.

(2) Leider kann die Laserschwelle niemals erreicht werden, wenn die Atome ein 'geschlossenes Zwei-Niveau-System' bilden. Überprüfen Sie diese Aussage, indem Sie für einen festen Wert von I die stationäre Lösung für N_e und N_g berechnen. Einstein benutzte die Forderung, dass das Verhältnis N_e/N_g im stationären Zustand gleich dem Boltzmann-Faktor $\mathrm{e}^{-(E_e-E_g)/kT}$ sei (thermisches Gleichgewicht), um die spektrale Verteilung $I = I(\omega)$ der thermischen Strahlung abzuleiten (Plancksche Strahlungsformel).

(3) Ein einfaches Modell, in dem das Lasen funktioniert, ergänzt die Gleichung für $\dot{N}_e$ um einen Term R_e und die für $\dot{N}_g$ um einen Term $-\gamma_g N_g$. Passen Sie das Python-Skript im Moodle-Abschnitt 'Lasertheorie' auf die Einsteinschen Ratengleichungen an, spielen Sie mit den Parametern und untersuchen Sie das zeitliche Verhalten auf dem Weg zu einem stationären Zustand.

Aufgabe 3.2 – Mastergleichungen für den Laser (10 Punkte + 5 Bonuspunkte)
In der Vorlesung haben wir die Quantentheorie des Lasers mit Hilfe von Master-Gleichungen in Lindblad-Form formuliert. Ein Beispiel wäre folgende Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\,\rho] + \kappa\left(a\rho a^\dagger - \tfrac{1}{2}\left\{a^\dagger a,\,\rho\right\}\right)\\ &\quad + \left(L\rho L^\dagger - \tfrac{1}{2}\left\{L^\dagger L,\,\rho\right\}\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei der Anti-Kommutator zweier Operatoren wie folgt definiert ist

$$\{A,\,B\} = AB + BA \tag{3.5}$$

Die Mastergleichung (3.4) erhält die Spur von ρ. Weil sie in Lindblad-Form ist, hat sie noch einige andere Eigenschaften, die dazu führen, dass ρ zu allen Zeiten als Dichteoperator interpretierbar ist.

(1) Eine einfache Wahl für ein Laser-Modell benutzt den Operator $L = \sqrt{G}\,a^\dagger$. Zeigen Sie, dass κ und G als Raten für den Verlust und den Gewinn von Photonen gelesen werden können, indem Sie aus (3.4) eine Differentialgleichung für den Erwartungswert der Photonenzahl ausrechnen:

$$\langle\hat{n}\rangle = \mathrm{tr}(a^\dagger a\rho)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}\rangle = \mathrm{tr}\Big(a^\dagger a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\Big) \tag{3.6}$$

Verwenden Sie $H = \hbar\omega_c a^\dagger a$. Wenn Sie sich wundern, dass diese Gleichung keine stationäre Lösung oberhalb der Laserschwelle (für $G > \kappa$) hat – genau das würde ich auch erwarten.

Wenn man aus einer Lindblad-Mastergleichung die Entwicklung einer Observablen A erhalten will, ist folgende Formel nützlich:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[A(L_k\rho L_k^\dagger - \{L_k^\dagger L_k,\rho\})\right] &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[AL_k\rho L_k^\dagger - AL_k^\dagger L_k\rho\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[AL_k\rho L_k^\dagger - A\rho L_k^\dagger L_k\right]\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[L_k^\dagger AL_k\rho - AL_k^\dagger L_k\rho\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[L_k^\dagger AL_k\rho - L_k^\dagger L_kA\rho\right]\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left([L_k^\dagger, A]L_k\rho\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(L_k^\dagger[A, L_k]\rho\right)\\ &= \frac{1}{2}\langle[L_k^\dagger, A]L_k\rangle + \frac{1}{2}\langle L_k^\dagger[A, L_k]\rangle\end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei die Notation L_k alle Lindblad-Operatoren zusammenfasst. Es reicht also aus, den Kommutator $[A, L_k]$ zu berechnen. Dazu konjugiert ist $[L_k^\dagger, A]$.

(2*) An keiner Stelle liefert die Mastergleichung allerdings einen Hinweis darauf, dass der Laser einen Erwartungswert $\langle\hat{a}\rangle \neq 0$ liefert, obwohl wir das doch die ganze Zeit als typisch für einen Laser verwendet haben. Untersuchen

Sie diese Frage, indem Sie eine Gleichung für die 'Kohärenz' $\rho_{01} = \langle 0|\rho|1\rangle$ finden (so nennt man dieses nicht-diagonale Matrixelement). [*5 Bonuspunkte]

(3) Ein verbessertes Modell berücksichtigt die Tatsache, dass ein typisches aktives Medium mit steigender Intensität für das Laserlicht transparent wird: Grund- und angeregter Zustand sind gleich stark besetzt und stimulierte Emission und Absorption halten sich die Waage. Ein einfache Möglichkeit, dies in eine Lindblad-Form zu gießen, ist der 'nichtlineare Verstärkungs-Operator'

$$L = \sqrt{G}\, a^\dagger \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \hat{n}}} \tag{3.8}$$

der die Wahl von Punkt (1) ersetzt. Versuchen Sie, diese Wahl zu begründen und den Parameter β physikalisch zu interpretieren.

(4) Zeigen Sie, dass die Mastergleichung dann folgenden Satz von Ratengleichungen für die 'Photonenstatistik' $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$ $(n = 0, 1, \ldots)$ liefert

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = \kappa\left((n+1)p_{n+1} - np_n\right) + G\left(\frac{np_{n-1}}{1 + \beta(n-1)} - \frac{(n+1)p_n}{1 + \beta n}\right) \tag{3.9}$$

In der Vorlesung werden wir die stationäre Lösung dieser Gleichung diskutieren.